Traité du triangle arithmétique , avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière. Par Monsieur Pascal

TRAITE
DU TRIANGLE ARITHMETIQUE,
AVEC QUELQUES AUTRES PETITS TRAITEZ SUR LA MESME MATIERE.

Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GUILLAUME DESPREZ, ruë saint Iacques, à Saint Prosper.

M. DC. LXV.

AVERTISSEMENT.

CEs Traittez n'ont point encore paru, quoy qu'il y ayt desia long temps qu'ils soient composez. On les à trouuez tous Imprimez parmy les papiers de Monsieur Pascal, ce qui fait voir qu'il auoit eu dessein de les publier: Mais ayant, peu de temps apres, entierement quitté ces sortes déstudes, il negligea de faire paroistre ces Ouurages, que l'on a jugé à propos de donner au public apres sa mort, pour ne le pas priuer de l'auantage qu'il en pourra retirer. C'est l'vnique but que l'on a eu dans cette publication; Car quoy que ces Traittez ayent esté admirez par toutes les personnes qui les ont leûs, on ne les juge pas neantmoins capables de pouuoir beaucoup adiouster à la reputation que Monsieur Pascal s'est aquise parmy toutes les personnes sçauantes, par les Ouurages plus considerables qu'on a veûs de luy. Et l'on supplie le Lecteur de les regarder aussi comme vne chose qu'il a negligée luy mesme, & à laquelle il ne s'est appliqué que legerement, & plutost pour delasser son esprit que pour l'employer, la jugeant indigne de cette application forte & serieuse qu'il auoit accoutumé d'apporter dans les choses plus importantes, & qui meritent seules, comme il le disoit souuent, d'occuper l'esprit des personnes raisonnables & Chrestiennes.

TABLE DES TRAITEZ contenus dans ce Recüeil.

Triangle Arithmetique

Z	1	2	3	4	5	6	7	L 8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1	1	1	1
2	φ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
T 8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Rangs paralleles

Rangs perpendiculaires

TRAITTE' DV TRIANGLE ARITHMETIQVE,

DEFINITIONS.

I'Appelle Triangle Arithmetique, *vne figure dont la construction est telle.*

Ie mene d'vn point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires, l'vne à l'autre, G V, G ζ, dans chacune desquelles ie prens tant que ie veux de parties égales, & continuës à commencer par G, que ie nomme 1. 2. 3. 4. *&c. & ces nombres sont* les exposans *des diuisions des lignes.*

En suitte ie ioints les points de la premiere diuision qui sont dans chacune des deux lignes, par vne autre ligne qui forme vn triangle dont elle est la base.

Ie ioints ainsi les deux points de la seconde diuision par vne autre ligne, qui forme vn second triangle dont elle est la base.

Et ioignant ainsi tous les points de diuision, qui ont vn mesme exposant, i'en forme autant de triangles & de bases.

Ie mene par chacun des points de diuision, des lignes paralleles aux costez, qui par leurs intersections forment de petits quarrez, que i'appelle Cellules.

Et les cellules qui sont entre deux paralleles qui vont de gauche à droit, s'appellent cellules d'vn mesme rang parallele, *comme les cellules, G, σ, π, &c. ou φ, ψ, θ, &c.*

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent, cellules d'vn mesme rang perpendiculaire, *comme les cellules G, φ, A, D, &c. & celles-cy, σ, ψ, B, &c.*

Et celles qu'vne mesme base trauerse diagonalement sont dites cellules d'vne mesme base, *comme celles qui suiuent, D, B, θ, λ, & celles-cy, A, ψ, ϖ.*

Les cellules d'vne mesme base également distantes de ses extremitez, sont dites reciproques, *comme celles-cy, E, R, & B, θ. Parce que l'exposant du rang parallele de l'vne, est le mesme que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroist en cet exemple, ou E, est* *dans le second rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele; & sa reciproque R, est dans le second rang parallele, & dans le quatriesme perpendiculaire reciproquement. Et il est bien facile de demonstrer que celles qui ont leurs exposans reciproquement pareils, sont dans vne mesme base, & également distantes de ses extremitez.*

Il est aussi bien facile de demonstrer, que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, ioint à l'exposant de son rang parallele, surpasse de l'vnité l'exposant de sa base.

Par exemple, la cellule F, est dans le troisiéme rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele, & dans la sixiesme base, & ces deux exposants des rangs, 3 † 4 surpassent de l'vnité l'exposant de la base 6. ce qui vient de ce que les deux costez du Triangle sont diuisez en vn pareil nombre de parties, mais cela est plustost compris, que demonstré.

Cette remarque est de mesme nature, que chaque base contient vne cellule plus que la precedente, & chacune autant que son exposant d'vnitez, ainsi la seconde φ σ à deux cellules, la troisiesme A ψ π en a trois &c.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouuent par cettte methode.

Le nombre de la premiere cellule qui est à l'angle droit est arbitraire, mais celuy-là estant placé tous les autres sont forcez, & pour cette raison il s'appelle le Generateur *du triangle. Et chacun des autres est specifié par cette seule regle.*

Le nombre de chaque cellule, est égal à celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, c'est à dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; & ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs consequences. En voicy les principales, ou ie considere les triangles, dont le generateur est l'vnité; mais ce qui s'en dira conuiendra à tous les autres.

Consequence premiere.

En tout Triangle Arithmetique, toutes les cellules du premier rang parallele, & du premier rang perpendiculaire, sont pareilles à la generatrice.

Car par la construction du Triangle, chaque cellule est égale à celle qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la precede dans son rang parallele; Or les cellules du premier rang parallele, n'ont aucunes cellules qui les precedent dans leurs rangs perpendiculaires, ny celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs paralleles, donc elles sont toutes égales entr'-elles, & partant au premier nombre generateur.

Ainsi, φ, égale G + zero, c'est à dire φ, égale, G.

Ainsi A, égale φ + zero, c'est à dire φ.

Ainsi σ, égale G + zero, & π, égale σ + zero.

Et ainsi des autres.

Consequence seconde.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele precedent, comprises depuis son rang perpendiculaire iusques au premier inclusiuement.

Soit vne cellule quelconque ω, ie dis qu'elle est égale à R + θ + ψ + φ, qui sont celles du rang parallele superieur depuis le rang perpendiculaire de ω, iusques au premier rang perpendiculaire.

Cela est euident par la seule interpretation des cellules, par celles d'où elles sont formées.

Car ω, égale $R + \underbrace{C}_{\theta + \underbrace{B}_{\psi + \underbrace{A}_{\varphi}}}$

Car A & φ sont égaux entr'eux. par la precedente.

Donc ω égale R + θ + ψ + φ.

Consequence troisiesme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire precedent, comprises depuis son rang parallele iusques au premier inclusiuement.

Soit vne cellule quelconque C, ie dis qu'elle est égale à B + ψ + σ, qui sont celles du rang perpendiculaire precedent depuis le rang parallele de la cellule C, iusques au premier rang parallele.

Cela paroist de mesme par la seule interpretation des cellules.

Car C, égale $B + \underbrace{\theta}_{\psi + \underbrace{\pi}_{\sigma}}$

Car π égale σ par la premiere.

Donc C, égale B + ψ + σ.

Conſequence quatrieſme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule diminuée de l'vnité, eſt égale à la ſomme de toutes celles qui ſont compriſes entre ſon rang parallele, & ſon rang perpendiculaire excluſiuement.

Soit vne cellule quelconque ξ, ie dis que ξ—G égale R † θ † ψ † φ † λ † π † σ † G; qui ſont tous les nombres compris entre le rang ξ ω C B A, & le rang ξ S μ, excluſiuement.

Cela paroiſt de meſme par l'interpretation.

Car ξ égale λ † R † ω

π † θ † C

σ † ψ † B

G † φ † A

G

Donc ξ égale λ † R † π † θ † σ † ψ † G † φ † G.

Aduertiſſement.

I'ay dit dans l'enonciation, chaque cellule diminuée de l'vnité, *parce que l'vnité eſt le generateur; mais ſi c'eſtoit vn autre nombre, il faudroit dire*, chaque cellule diminuée du nombre generateur.

Conſequence cinquieſme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule eſt égale à ſa reciproque.

Car dans la ſeconde baſe φ σ, il eſt euident que les deux cellules reciproques φ, σ, ſont égales entr'elles, & à G.

Dans la troiſieſme A, ψ, π, il eſt viſible de meſme que les reciproques π, A, ſont égales entr'elles & à G.

Dans la quatrieſme, il eſt viſible que les extremes D, λ, ſont encores égales entr'elles & à G.

Et celles d'entre deux, B, θ, ſont viſiblement égales, puiſque B égale A † ψ & θ égale ψ † π, or π † ψ ſont égales à A † ψ parce qui eſt monſtré donc &c.

Ainſi l'on monſtrera dans toutes les autres baſes que les reciproques ſont égales, parce que les extremes ſont touſiours pareilles à G,

& que les autres s'interpreteront tousiours par d'autres égales dans la base precedente qui sont reciproques entr'elles.

Consequence sixiesme.

En tout Triangle Arithmetique, vn rang parallele, & vn perpendiculaire, qui ont vn mesme exposant, sont composez de cellules toutes pareilles les vnes aux autres.

Car ils sont composez de cellules reciproques.

Ainsi le second rang perpendiculaire σ ψ B E M Q est entierement pareil au second rang parallele φ ψ θ R S N.

Consequence septiesme.

En tout Triangle Arithmetique, la somme des cellules de chaque base, est double de celles de la base precedente.

Soit vne base quelconque D B θ λ. Ie dis que la somme de ses cellules, est double de la somme des cellules de la precedente A ψ π.

Car les extremes, D, λ, égalent les extremes, A, π,

Et chacune des autres B, θ, en égalent deux de, A † ψ, ψ † π, l'autre base.

Donc, D † λ † B † θ, égalent 2 A † 2 ψ † 2 π,

La mesme chose se demonstre de mesme de toutes les autres.

Consequence huictiesme.

En tout Triangle Arithmetique, la somme des cellules de chaque base, est vn nombre de la progression double, qui commence par l'vnité, dont l'exposant est le mesme que celuy de la base.

Car la premiere base est l'vnité.

La seconde est double de la premiere, donc elle est 2.

La troisiesme est double de la seconde, donc elle est 4.

Et ainsi à l'infiny.

Aduertissement.

Si le generateur n'estoit pas l'vnité, mais vn autre nombre comme 3, la mesme chose seroit vraye; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'vnité, sçauoir, 1, 2, 4, 8, 16. &c. mais ceux d'vne autre progression double à commencer par le generateur 3, sçauoir, 3, 6, 12, 24, 48, &c.

Conſequence neufieſme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque baſe diminuée de l'vnité, eſt égale à la ſomme de toutes les precedentes.

Car c'eſt vne proprieté de la progreſſion double.

Aduertiſſement.

Si le generateur eſtoit autre que l'vnité, il faudroit dire, chaque baſe diminuée du generateur.

Conſequence dixieſme.

En tout Triangle Arithmetique, la ſomme de tant de cellules continuës qu'on voudra de ſa baſe, à commencer par vne extremité, eſt égale à autant de cellules de la baſe precedente, plus encore à autant hormis vne.

Soit priſe la ſomme de tant de cellules qu'on voudra de la baſe D λ par exemple les trois premieres, D † B † θ,

Ie dis quelle eſt égale à la ſomme des trois premieres de la baſe precedente A † ψ † π, plus aux deux premieres de la meſme baſe A † ψ.

Car D. B. θ.

égale A. A † ψ. ψ † π. Donc, D † B † θ égale, 2 A † 2 ψ † π.

Definition.

I'appelle, Cellules de la Diuidente, *celles que la ligne qui diuiſe l'angle droit par la moitié, trauerſe diagonalement comme les cellules*, G, ψ, C, ρ, &c.

Conſequence vnzieſme.

Chaque cellule de la Diuidente, eſt double de celle qui la precede dans ſon rang parallele ou perpendiculaire.

Soit vne cellule de la Diuidente, C, Ie dis qu'elle eſt double de, θ, & auſſi de, B.

Car, C, égale, θ † B, &, θ, égale B, par la cinquieſme conſequence.

Aduertiſſement.

Toutes ces conſequences, ſont ſur le ſujet des égalitez qui ſe rencon-

trent dans le Triangle Arithmetique. On en va voir maintenant les proportions, dont la proposition suiuante est le fondement.

Conséquence douziesme.

En tout Triangle Arithmetique, deux cellules contigues estant dans vne mesme base, la superieure est à l'inferieure, comme la multitude des cellules depuis la superieure iusques au haut de la base, à la multitude de celles, depuis l'inferieure iusques en bas inclusiuement.

Soient deux cellules contigues quelconques d'vne mesme base, E, C,

Ie dis que E	est à C	comme 2	à 3
inferieure,	*superieure,*	*parce qu'il y a deux cellules depuis E iusques en bas, sçauoir, E, H;*	*parce qu'il y a trois cellules depuis C iusques en haut, sçauoir C, R, μ.*

Quoy que cette proposition ait vne infinité de cas, i'en donneray vne demonstration bien courte, en supposant 2 lemme.

Le 1. qui est euident de soy-mesme, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1, à 1.

Le 2. que si cette proportion se trouue dans vne base quelconque, elle se trouuera necessairement dans la base suiuante.

D'où il se voit, qu'elle est necessairement dans toutes les bases: car, elle est dans la seconde base, par le premier lemme, donc par le second elle est dans la troisiesme base, donc dans la quatriesme, & à l'infiny.

Il faut donc seulement demonstrer le second lemme, en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en vne base quelconque, comme en la quatriesme D λ, c'est à dire, si D est à B comme 1 à 3. Et B, à θ comme 2 à 2. Et θ à λ comme 3 à 1. &c.

Ie dis, que la mesme proportion se trouuera dans la base suiuante, H μ, & que par exemple E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3. par l'hypothese.

Donc $\underbrace{\text{D} \dagger \text{B}}_{\text{E}}$ est à B comme $\underbrace{1 \dagger 3}_{4}$ à 3.

E à B comme 4 à 3.

De mesme, B est à θ comme 2 à 2 par l'hypothese.

Donc, $\underbrace{\text{B} \dagger \theta}_{\text{C}}$ à B comme, $\underbrace{2 \dagger 2}_{4}$ à 2.

C à B comme 4 à 2

Mais B à E comme 3 à 4 comme il est monstré.

Donc par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

Ce qu'il falloit demonstrer.

On le monſtrera de meſme dans tout le reſte, puiſque cette preuue n'eſt fondée que ſur ce que cette proportion ſe trouue dans la baſe precedente, & que chaque cellule eſt égale à ſa precedente, plus à ſa ſuperieure, ce qui eſt vray par tout.

Conſequence treizieſme.

En tout Triangle Arithmetique, deux cellules continuës eſtant dans vn meſme rang perpendiculaire, l'inferieure eſt à la ſuperieure; comme l'expoſant de la baſe de cette ſuperieure, à l'expoſant de ſon rang parallele.

Soient deux cellules quelconques dans vn meſme rang perpendiculaire, F, C, Ie dis que,

F eſt à	C comme	5. à	3.
l'inferieure.	La ſuperieure	expoſant de la baſe de C.	expoſant du rang parallele de C.

Car E eſt à C comme 2. à 3.

Donc $\underbrace{E \dagger C}_{F}$ eſt à C comme $\underbrace{2 \dagger 3}_{5.}$ à 3.

F eſt à C comme 5. à 3.

Conſequence quatorzieſme.

En tout Triangle Arithmetique, deux cellules continuës eſtant dans vn meſme rang parallele, la plus grande eſt à ſa precedente, comme l'expoſant de la baſe de cette precedente, à l'expoſant de ſon rang perpendiculaire.

Soient deux cellules dans vn meſme rang parallele F, E,
Ie dis que,

F eſt à	E comme	5. à	2.
La plus grande.	*precedente*	*expoſant de la baſe de E.*	*expoſant du rang perpendicul. de E.*

Car E eſt à C comme 2. à 3.

Donc $\underbrace{E \dagger C}_{F}$ eſt à E comme $\underbrace{2 \dagger 3.}_{5.}$ à 2.

F eſt à E comme 5. à 2.

Conſequence quinzieſme.

En tout Triangle Arithmetique, la ſomme des cellules d'vn quelconque rang parallele, eſt à la derniere de ce rang, comme l'expoſant du triangle, eſt à l'expoſant du rang.

Soit

Soit vn triangle quelconque, par exemple le quatriesme G D λ, Ie dis que quelque rang qu'on y prenne comme le second parallele, la somme de ses cellules, sçauoir, φ † ψ † θ, est à θ comme 4. à 2. Car φ † ψ † θ, égale C, & C est à θ comme 4. à 2. par la treiziéme Consequence.

Consequence seiziéme.

En tout Triangle Arithmetique, vn quelconque rang parallele, est au rang inferieur, comme l'exposant du rang inferieur à la multitude de ses cellules.

Soit vn triangle quelconque, par exemple le cinquiéme μ G H. Ie dis que quelque rang qu'on y prenne, par exemple le troisiéme, la somme de ses cellules, est à la somme de celles du quatriéme, c'est à dire A † B † C est à D † E. Comme 4. exposant du rang quatriéme à 2. qui est l'exposant de la multitude de ses cellules, car il en contient 2.

Car A † B † C égale F, & D † E égale M.
Or F est à M comme 4 à 2. par la douziéme Consequence.

Aduertissement.

On pourroit l'enoncer aussi de cette sorte.

Chaque rang parallele est au rang inferieur comme l'exposant du rang inferieur, à l'exposant du triangle, moins l'exposant du rang superieur.

Car l'exposant d'vn triangle moins l'exposant d'vn de ses rangs est tousiours égal à la multitude des cellules du rang inferieur.

Consequence dix-septiesme.

En tout Triangle Arithmetique, quelque cellule que ce soit iointe à toutes celles de son rang perpendiculaire, est à la mesme cellule jointe à toutes celles de son rang parallele, comme les multitudes des cellules prises dans chaque rang.

Soit vne cellule quelconque B, Ie dis que B † ψ † σ est à B † A comme 3. à 2.

Ie dis 3, parce qu'il y a trois cellules adioustées dans l'antecedent; & 2, parce qu'il y en a deux dans le consequent.

Car B † ψ † σ égale C par la troisiesme consequence, & B † A égale E par la seconde consequence.

Or C est à E comme 3 à 2. par la douziesme consequence.

Consequence dix-huictiesme.

En tout Triangle Arithmetique, deux rangs paralleles également distans des extremitez, sont entr'eux, comme la multitude de leurs cellules.

Soit vn triangle quelconque G V ζ, & deux de ses rangs également distans des extremitez: comme le sixiesme P † Q & le second φ † ψ † θ † R † S † N,

Ie dis que la somme des cellules de l'vn, est à la somme des cellules de l'autre, comme la multitude des cellules de l'vn, est à la multitude des cellules de l'autre.

Car par la sixiesme consequence, le second rang parallele φ ψ θ R S N, est le mesme que le second rang perpendiculaire σ ψ B E M Q, duquel nous venons de demonstrer cette proportion.

Aduertissement.

On peut l'enoncer ainsi.

En tout Triangle Arithmetique, deux rangs paralleles, dont les exposants joints ensemble excedent de l'vnité l'exposant du Triangle, sont entr'eux, comme leurs exposans reciproquement.

Car ce n'est qu'vne mesme chose que ce qui vient d'estre enoncé.

Consequence derniere.

En tout Triangle Arithmetique, deux cellules continuës estant dans la diuidente, l'inferieure, est à la superieure prise quatre fois, comme l'exposant de la base de cette superieure, à vn nombre plus grand de l'vnité.

Soient deux cellules de la diuidente ρ, C,

Ie dis que ρ est à 4 C comme 5. à 6.
exposant de la base de C.

Car ρ est double de ω, & C de θ, donc 4 θ égalent 2. C,

Donc 4 θ sont à C comme 2. à 1.

Or ρ est à 4 C comme ω à 4 θ,

ou en raison composée de ω, à C † C à 4 θ

$$\underbrace{\underbrace{\omega,\ \text{à}\ C}_{5,\ \text{à},\ 3.}\ †\ \underbrace{C\ \text{à}\ 4\,\theta}_{1.\ \text{à}\ 2.\ \text{ou}\ 3\ \text{à}\ 6.}}_{5.\ \text{à}\ 6.}$$

Par les Conseq. preced.

Donc ρ est à 4 C comme 5. à 6. Ce qu'il falloit demonstrer.

Aduertissement.

On peut tirer de là beaucoup d'autres proportions que ie supprime, parce que chacun les peut facilement conclurre, & que ceux qui s'y voudront attacher en trouueront peut estre de plus belles que celles que ie pourrois donner. Ie finis donc par le Probleme suiuant, qui fait l'accomplissement de ce traitté.

PROBLEME.

Estant donnez les exposans des rangs perpendiculaire & parallele d'vne cellule, trouuer le nombre de la cellule, sans se seruir du Triangle Arithmetique.

Soit par exemple proposé de trouuer le nombre de la cellule ξ, du cinquiesme rang perpendiculaire, & du troisiesme rang parallele.

Ayant pris tous les nombres qui precedent l'exposant du perpendiculaire 5. sçauoir 1, 2, 3, 4;

Soient pris autant de nombres naturels, à commencer par l'exposant du parallele 3, sçauoir 3, 4, 5, 6.

Soient multipliez les premiers l'vn par l'autre, & soit le produit 24. Soient multipliez les autres l'vn par l'autre, & soit le produit 360. qui diuisé par l'autre produit 24. donne pour quotient 15. Ce quotient est le nombre cherché.

Car ξ est à la premiere de sa base V, en raison composée de toutes les raisons des cellules d'entre deux, c'est à dire,

$$\xi \text{ est à } V \text{, en raison comp. de } \underbrace{\underbrace{\xi \text{ à } \rho}_{3 \text{ à } 4.} \dagger \underbrace{\rho \text{ à } K}_{4 \text{ à } 3.} \dagger \underbrace{K \text{ à } Q}_{5 \text{ à } 2.} \dagger \underbrace{Q \text{ à } V}_{6 \text{ à } 1.}}$$

ou

par la 12. *Conseq.*

Donc ξ est à V Comme 3 en 4 en 5 en 6. à 4 en 3 en 2 en 1.

Mais V est l'vnité; donc ξ, est le quotient de la diuision du produit de 3 en 4 en 5 en 6. par le produit de 4 en 3 en 2 en 1.

Aduertissement.

Si le generateur n'estoit pas l'vnité, il eust fallu multiplier le quotient par le generateur.

DIVERS VSAGES DV TRIANGLE ARITHMETIQVE.

Dont le generateur est l'Vnité.

APres auoir donné les proportions qui se rencontrent entre les cellules & les rangs des Triangles Arithmetiques, ie passe à diuers vsages de ceux dont le generateur est l'vnité; c'est ce qu'on verra dans les traictez suiuans. Mais i'en laisse bien plus que ie n'en donne; c'est vne chose estrange combien il est fertile en proprietez, chacun peut s'y exercer; i'auertis seulement icy, que dans toute la suite, ie n'entends parler que des Triangles Arithmetiques, dont le generateur est l'vnité.

VSAGE DV TRIANGLE ARITHMETIQVE,

POVR LES ORDRES NVMERIQVES.

ON a consideré dans l'Arithmetique les nombres des differentes progressions ; on a aussi consideré ceux des differentes puissances, & des differents degrez ; mais on n'a pas ce me semble assez examiné ceux dont ie parle, quoy qu'ils soient d'vn tres grand vsage, & mesme ils n'ont pas de nom, ainsi i'ay esté obligé de leur en donner ; Et parce que ceux de progression, de degré & de puissance, sont déja employez, ie me sers de celuy *d'ordres.*

I'appelle donc *Nombres du premier ordre* les simples vnitez.

1, 1, 1, 1, 1, &c.

I'appelle, *Nombres du second ordre*, les naturels qui se forment par l'addition des vnitez. 1, 2, 3, 4, 5, &c.

I'appelle, *Nombres du troisiéme ordre* ceux qui se forment par l'addition des naturels, qu'on appelle Triangulaires.

1, 3, 6, 10, &c.

C'est à dire, que le second des triangulaires, sçauoir, 3, égale la somme des deux premieres naturels qui sont, 1, 2 ; ainsi le troisiéme triangulaire, 6, égale la somme des trois premiers naturels. 1, 2, 3, &c.

I'appelle, *Nombres du quatriesme ordre* ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle Pyramidaux.

1, 4, 10, 20, &c.

I'appelle, *Nombres du cinquiesme ordre* ceux qui se forment par l'addition des precedents, ausquels on n'a pas donné de nom exprés, & qu'on pourroit appeller triangulo-triangulaires.

1, 5, 15, 35 &c.

I'appelle, *Nombres du sixiesme ordre* ceux qui se forment par l'addition des precedents.

1, 6, 21, 56, 126, 252, &c.

Et ainsi à l'infiny. 1, 7, 28, 84, &c.

1, 8, 36, 120, &c.

Or si on fait vne table de tous les ordres des nombres, où l'on marque à costé les exposans des ordres, & au dessus les Racines, en cette sorte.

Racines.

		1	2	3	4	5	&c.
Vnitez	Ordre 1	1	1	1	1	1	&c.
Naturels	Ordre 2	1	2	3	4	5	&c.
Triangul.	Ordre 3	1	3	6	10	15	&c.
Pyramid.	Ordre 4	1	4	10	20	35	&c.
	&c.						

On trouuera cette Table pareille au Triangle Arithmetique.

Et le premier ordre des nombres, sera le mesme que le premier rang parallele du Triangle;

Le second ordre des nombres, sera le mesme que le second rang parallele; Et ainsi à l'infiny.

Car dans le Triangle Arithmetique le premier rang est tout d'vnitez, & le premier ordre des nombres est de mesme tout d'vnitez.

Ainsi dans le Triangle Arithmetique, chaque cellule, comme la cellule F, égale, C † B † A, c'est à dire qu'elle égale sa superieure, plus toutes celles qui precedent cette superieure dans son rang parallele; comme il a esté prouué dans la 2. Conseq. du Traitté de ce Triangle. Et la mesme chose se trouue dans chacun des ordres des nombres: Car, par exemple, le troisiéme des Pyramidaux 10, égale les trois premiers des triangulaires 1 † 3 † 6, puis qu'il est formé par leur addition.

D'où il se void manifestement, que les rangs paralleles du triangle, ne sont autre chose que les Ordres des nombres; Et que les exposans des rangs parallelles, sont les mesmes que les exposans des ordres, & que les exposans des rangs perpendiculaires, sont les mesmes que les Racines: Et ainsi le nombre par exemple, 21, qui dans le Triangle Arithmetique se trouue dans le troisiesme rang parallele, & dans le sixiesme rang perpendiculaire; estant consideré entre les ordres numeriques, il sera du troisiéme ordre, & le sixiesme de son ordre, ou de la sixiesme racine.

Ce qui fait connoistre, que tout ce qui a esté dit des rangs & des cellules du Triangle Arithmetique, conuient exactement aux ordres des nombres, & que les mesmes égalitez & les mesmes proportions qui ont esté remarquées aux vns, se trouueront aussi aux autres; il ne faudra seulement que changer les enonciations, en substituant les termes qui conuiennent aux ordres numeriques, comme ceux de racine & d'ordre, à ceux qui conuenoient au Triangle Arithmetique, comme de rang parallele & perpendiculaire. I'en donneray vn petit traitté à part, où quelques exemples qui y sont rapportez feront aysement apperceuoir tous les autres.

VSAGE DV TRIANGLE ARITMETIQVE, POVR LES COMBINAISONS.

LE mot de, *Combinaison*, a esté pris en plusieurs sens differens ; de sorte que pour oster l'equiuoque, ie suis obligé de dire comment ie l'entends.

Lors que de plusieurs choses, on donne le choix d'vn certain nombre, toutes les manieres d'en prendre autant qu'il est permis, entre toutes celles qui sont presentées, s'appellent icy, *les differentes combinaisons*.

Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, A, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques ; toutes les manieres d'en prendre deux differentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent, *Combinaisons*.

Ainsi on trouuera par experience, qu'il y a six manieres differentes d'en choisir deux dans quatre; car on peut prendre, A & B, ou A & C, ou, A & D, ou B, & C, ou B & D, ou C, & D.

Ie ne conte pas, A, & A, pour vne des manieres d'en prendre deux, car ce ne sont pas des choses differentes, ce n'en est qu'vne repetée.

Ainsi ie ne conte pas A, & B, & puis, B & A, pour deux manieres differentes, car on ne prend en l'vne & en l'autre maniere que les deux mesmes choses, mais d'vn ordre different seulement, & ie ne prends point garde à l'ordre; de sorte que ie pouuois m'expliquer en vn mot à ceux qui ont accoustumé de considerer les combinaisons, en disant simplement que ie parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre.

On trouuera de mesme par experience, qu'il y a quatre manieres de prendre trois choses dans quatre, car on peut prendre, ABC, ou ABD, ou ACD, ou BCD.

Enfin on trouuera qu'on n'en peut prendre quatre dans quatre qu'en vne maniere, sçauoir, ABCD.

Ie parleray donc en ces termes.

1	dans	4	se combine	4	fois.
2	dans	4	se combine	6	fois.
3	dans	4	se combine	4	fois.
4	dans	4	se combine	1	fois.

Où ainsi.

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.

La multitude des combinaiſons de 2 dans 4 eſt 6.
La multitude des combinaiſons de 3 dans 4 eſt 4.
La multitude des combinaiſons de 4 dans 4 eſt 1.

Mais la ſomme de toutes les combinaiſons en general qu'on peut faire dans quatre, eſt quinze, parce que la multitude des combinaiſons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, & de 4 dans 4, eſtans jointes enſemble, font 15;

En ſuitte de cette explication ie donneray ces conſequences en forme de Lemmes.

Lemme 1.

Vn nombre ne ſe combine point dans vn plus petit, par exemple, quatre ne ſe combine point dans deux.

Lemme 2.

Vn dans vn ſe combine vne fois.
2 dans 2 ſe combine 1 fois.
3 dans 3 ſe combine 1 fois.

Et generalement vn nombre quelconque ſe combine vne fois ſeulement dans ſon égal.

Lemme 3.

1 dans 1 ſe combine 1 fois.
1 dans 2 ſe combine 2 fois.
1 dans 3 ſe combine 3 fois.

Et generalement l'vnité ſe combine dans quelque nombre que ce ſoit autant de fois qu'il contient d'vnitez.

Lemme 4.

S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le ſecond plus grand de l'vnité, le troiſieſme tel qu'on voudra, pourueu qu'il ne ſoit pas moindre que le ſecond, le quatrieſme plus grand de l'vnité que le troiſieſme: La multitude des combinaiſons du premier dans le troiſieſme, jointe à la multitude des combinaiſons du ſecond dans le troiſieſme; égale la multitude des combinaiſons du ſecond dans le quatrieſme.

Soient quatre nombres tels que i'ay dit.

Le premier tel qu'on voudra, par exemple,	1.
Le ſecond plus grand de l'vnité, ſçauoir	2.
Le troiſieſme tel qu'on voudra, pourueu qu'il ne ſoit pas moindre que le ſecond, par exemple,	3.
Le quatrieſme plus grand de l'vnité, ſçauoir,	4.

Ie dis que la multitude des combinaiſons des 1 dans 3, plus la multitude des combinaiſons de 2 dans 3, égale la multitude des combin. de 2 dans 4.

Soient trois lettres quelconques, B, C, D.

Soient les meſmes trois lettres, & vne de plus, A, B, C, D.

Prenons ſuiuant la propoſition toutes les combinaiſons d'vne lettre dans les trois, B, C, D. Il y en aura 3, ſçauoir, B, C, D.

Prenons dans les meſmes 3 lettres toutes les combinaiſons de deux, il y en aura 3, ſçauoir, B C, B D, C D.

Prenons enfin dans les quatre lettres, A, B, C, D, toutes les combinaiſons de 2, il y en aura 6, ſçauoir, A B, A C, A D, B C, B D, C D.

Il faut demonſtrer, que la multitude des combinaiſons de 1 dans 3, & celles de 2 dans 3, égalent celles de 2 dans 4;

Cela eſt aiſé : Car, les combinaiſons de 2 dans 4 ſont formées par les combinaiſons de 1 dans 3, & par celles de 2 dans 3.

Pour le faire voir. Il faut remarquer qu'entre les combinaiſons de 2 dans 4, ſçauoir, A B, A C, A D, B C, B D, C D; il y en a où la lettre, A, eſt employée, & d'autres où elle ne l'eſt pas.

Celles où elle n'eſt pas employée ſont, B C, B D, C D, qui par conſequent ſont formées de deux de ces trois lettres, B, C, D; Donc ce ſont des combinaiſons de 2 dans ces trois, B, C, D. Donc les combinaiſons de 2 dans ces trois lettres, B, C, D, font portion des combinaiſons de 2 dans ces quatre lettres, A, B, C, D, puiſque elles forment celles où, A, n'eſt pas employée.

Maintenant ſi des combinaiſons de 2 dans 4 où A eſt employée, ſçauoir, A B, A C, A D, on oſte l'A, il reſtera vne lettre ſeulement de ces trois, B, C, D, ſçauoir, B, C, D; qui ſont preciſement les combinaiſons d'vne lettre dans les trois, B, C, D. Donc ſi aux combinaiſons d'vne lettre dans les trois B, C, D, on adjouſte à chacune la lettre, A, & qu'ainſi on ait A B, A C, A D, on formera les combinaiſons de 2 dans 4, où A eſt employée; donc les combinaiſons de 1 dans 3 font portion des combinaiſons de 2 dans 4.

D'où il ſe void que les combinaiſons de 2 dans 4, ſont formées par les combinaiſons de 2 dans 3, & de 1 dans 3; & partant que la multitude des combinaiſons de 2 dans 4, égale celle de 2 dans 3, & de 1 dans 3.

On monſtrera la meſme choſe de tous les autres exemples, comme.

La multitude des combinaiſons de 29 dans 40.
Et la mult. des combinaiſons de 30 dans 40.
Egale la mult. des combinaiſons de 30 dans 41.
Ainſi la multitude des combinaiſons de 15 dans 55.
Et la multitude des combinaiſons de 16 dans 55.
Egale la multitude des combinaiſons de 16 dans 56.

Et ainſi à l'infiny. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Propoſition 1.

En tout Triangle Arithmetique, la ſomme des cellules d'vn rang parallele quelconque, égale la multitude des combinaiſons, de l'expoſant du rang, dans l'expoſant du Triangle.

Soit vn triangle quelconque, par exemple le quatrieſme G D λ. Ie dis que la ſomme des cellules d'vn rang parallele quelconque, par exemple, du ſecond φ † ψ † θ. Egale la ſomme des combinaiſons de ce nombre, 2, qui eſt l'expoſant de ce ſecond rang, dans ce nombre, 4, qui eſt l'expoſant de ce triangle.

Ainſi la ſomme des cellules du 5 rang du 8 triangle égale la ſomme des combinaiſons de 5 dans 8, &c.

La demonſtration en ſera courte, quoy qu'il y ait vne infinité de cas, par le moyen de ces deux Lemmes.

Le 1. qui eſt euident de luy-meſme, que dans le premier triangle, cette égalité ſe trouue; puiſque la ſomme des cellules de ſon vnique rang, ſçauoir, G, ou l'vnité, égale la ſomme des combinaiſons de 1, expoſant du rang, dans 1 expoſant du Triangle.

Le 2. que s'il ſe trouue vn Triangle Arithmetique dans lequel cette proportion ſe rencontre, c'eſt à dire dans lequel quelque rang que l'on prenne, il arriue que la ſomme des cellules ſoit égale à la multitude des combinaiſons de l'expoſant du rang dans l'expoſant du Triangle; Ie dis que le Triangle ſuiuant aura la meſme proprieté.

D'où il s'enſuit que tous les Triangles Arithmetiques ont cette égalité; car elle ſe trouue dans le premier Triangle par le premier Lemme, & meſme elle eſt encore euidente dans le ſecond; Donc, par le ſecond Lemme, le ſuiuant l'aura de meſme, & partant le ſuiuant encore; & ainſi à l'infiny.

Il faut donc ſeulement demonſtrer le ſecond Lemme.

Soit vn triangle quelconque, par exemple le troiſieſme, dans lequel on ſuppoſe que cette égalité ſe trouue, c'eſt à dire, que la ſomme des cellules du premier rang G † σ † π; égale la multitude des combinaiſons de 1 dans 3; & que la ſomme des cellules du 2 rang φ † ψ, égale les combinaiſons de 2 dans 3; & que la ſomme des cellules du 3 rang A, égale les combinaiſons de 3 dans 3:

Ie dis que le quatrieſme triangle aura la meſme égalité, & que, par exemple, la ſomme des cellules du ſecond rang φ † ψ † θ, égale la multitude des combinaiſons de 2 dans 4.

$$\text{Car } \varphi \dagger \psi \dagger \theta \text{ égale } \underbrace{\underbrace{\varphi \dagger \psi}_{\text{ou la multitude des combinais. de 2 dans 3.}} \dagger \underbrace{\underbrace{\theta}_{G \dagger \sigma \dagger \varpi}}_{\text{ou la multitude des combinais. de 1 dans 3.}}}_{\text{Ou la multitude des combinaisons de 2 dans 4.}}$$

Par l'hypothese

Par le 4 Lemme

On le monstrera de mesme de tous les autres.

Ce qu'il falloit demonstrer.

Proposition 2.

Le nombre de quelque cellule que ce soit, égale la multitude des combinaisons d'vn nombre moindre de l'vnité que l'exposant de son rang parallele, dans vn nombre moindre de l'vnité que l'exposant de sa base.

Soit vne cellule quelconque, F, dans le quatriéme rang parallele & dans la sixiesme base: Ie dis qu'elle égale la multitude des combinaisons de 3 dans 5, moindres de l'vnité que, 4 & *6*: car elle égale les cellules, A † B † C. Donc par la precedente, &c.

Problesme 1. Proposition 3.

Estans proposez deux nombres; Trouuer combien de fois l'vn se combine dans l'autre, par le Triangle Arithmetique.

Soyent les nombres proposez 4, *6*, il faut trouuer combien 4 se combine dans *6*.

Premier moyen.

Soit prise la somme des cellules du 4 rang du *6*. triangle. Elle satisfera à la question.

Second moyen.

Soit prise la 5 cellule de la 7 base, parce que ces nombres 5, 7 excedent de l'vnité les donnez 4, *6*. Son nombre est celuy qu'on demande.

Conclusion.

Par le rapport qu'il y a, des cellules & des rangs du Triangle Arithmetique, aux combinaisons, il est aisé de voir que tout ce qui a esté prouué des vns, conuient aux autres suiuant leur maniere; C'est ce que ie monstreray en peu de discours dans vn petit traitté que i'ay fait des Combinaisons.

VSAGE DV TRIANGLE ARITHMETIQVE,

Pour determiner les partys qu'on doit faire entre deux Ioüeurs qui ioüent en plusieurs parties.

POVR entendre les regles des partys, la premiere chose qu'il faut considerer, est, que l'argent que les ioüeurs ont mis au jeu, ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la proprieté; mais ils ont receu en reuanche le droit d'attendre ce que le hazard leur en peut donner, suiuant les conditions dont ils sont conuenus d'abord.

Mais comme c'est vne loy volontaire, ils la peuuent rompre de gré à gré, & ainsi en quelque terme que le jeu se trouue, ils peuuent le quitter, & au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant renoncer à l'attente du hazard, & rentrer chacun en la proprieté de quelque chose; Et en ce cas, le reglement de ce qui doit leur appartenir, doit estre tellement proportionné à ce qu'ils auoient droit d'esperer de la fortune, que chacun d'eux trouue entierement égal de prendre ce qu'on luy assigne, ou de continuer l'auanture du jeu, & cette iuste distribution s'appelle le Party.

Le premier principe qui fait connoistre de quelle sorte on doit faire les partis, est celuy-cy.

Si vn des joüeurs se trouue en telle condition, que quoy qu'il arriue, vne certaine somme luy doit appartenir en cas de perte & de gain, sans que le hazard la luy puisse oster, il n'en doit faire aucun party, mais la prendre entiere comme asseurée, parce que le party deuant estre proportionné au hazard, puis qu'il n'y a nul hazard de perdre, il doit tout retirer sans party.

Le second est celuy-cy. Si deux joüeurs se trouuent en telle condition, que si l'vn gagne il luy appartiendra vne certaine somme, & s'il pert elle appartiendra à l'autre; Si le jeu est de pur hazard, & qu'il y ait autant de hazards pour l'vn que pour l'autre, & par consequent non plus de raison de gagner pour l'vn que pour l'autre, s'ils veulent se separer sans joüer, & prendre ce qui leur appartient legitimement, le party est qu'ils separent la somme qui est au hazard par la moitié, & que chacun prenne la sienne.

Corollaire premier.

Si deux joüeurs joüent à vn jeu de pur hazard, à condition que si le premier gagne il luy reuiendra vne certaine somme, & s'il pert il luy en reuiendra vne moindre, s'ils veulent se separer sans ioüer, & prendre chacun ce qui leur appartient; le party est, que le premier prenne ce qui luy reuient en cas de perte, & de plus la moitié de l'excez, dont ce qui luy reuiendroit en cas de gain surpasse ce qui luy reuient en cas de perte.

Par exemple, si deux joüeurs joüent à condition que si le premier gagne il emportera huit pistoles, & s'il pert il en emportera deux; Ie dis que le party est qu'il prenne ces deux, plus la moitié dont huit surpasse deux, c'est à dire plus 3. car 8. surpasse 2. de 6. dont la moitié est 3.

Car par l'hypothese s'il gagne il emporte 8. c'est à dire 6 † 2. & s'il pert il emporte 2. donc ces 2. luy appartiennent en cas de perte & de gain; Et par consequent par le premier principe, il n'en doit faire aucun party, mais les prendre entieres. Mais pour les 6. autres elles dependent du hazard; de sorte que s'il luy est fauorable, il les gagnera, sinon elles reuiendront à l'autre, & par l'hypothese il n'y a pas plus de raison qu'elles reuiennent à l'vn qu'à l'autre; Donc le party est qu'ils les separent par la moitié, & que chacun prenne la sienne, qui est ce que i'auois proposé.

Donc pour dire la mesme chose en d'autres termes, il luy appartient le cas de la perte, plus la moitié de la difference des cas de perte & de gain.

Et partant s'y en cas de perte il luy appartient A, & en cas de gain A † B, le party est qu'il prenne A † $\frac{1}{2}$ B.

Corollaire second.

Si deux joüeurs sont en la mesme condition que nous venons de dire, Ie dis que le party se peut faire de cette façon qui reuient au mesme, que l'on assemble les deux sommes de gain & de perte, & que le premier prenne la moitié de cette somme ; c'est à dire qu'on ioigne 2. auec 8. & ce sera 10. dont la moitié 5. appartiendra au premier.

Car la moitié de la somme de deux nombres est tousiours la mesme que la moindre plus la moitié de leur difference.

Et cela se demonstre ainsi.

Soit A ce qui reuient en cas de perte, & A † B ce qui reuient en cas de gain.

Ie dis que le party se fait en assemblant ces deux nombres, qui font A † A † B, & en donnant la moitié au premier qui est $\frac{1}{2}$ *A †* $\frac{1}{2}$ *A †* $\frac{1}{2}$ *B. Car cette somme égale A †* $\frac{1}{2}$ *B qui a esté prouuée faire le party iuste.*

Ces fondemens estans posez, nous passerons aisement à determiner le party entre deux joüeurs qui joüent en tant de parties qu'on voudra en quelque estat qu'ils se trouuent, c'est à dire, quel party il faut faire, quand ils joüent en deux parties, & que le premier en a vne à point, ou qu'ils joüent en trois, & que le premier en a vne à point, ou quand il en a deux à point, ou quand il en a deux à vne. Et generalement en quelque nombre de parties qu'ils joüent, & en quelque gain de parties qu'ils soient & l'vn & l'autre.

Sur quoy la premiere chose qu'il faut remarquer, est que deux joüeurs qui joüent en deux parties, dont le premier en a vne à point, sont en mesme condition que deux autres qui joüent en trois parties, dont le premier en a deux, & l'autre vne : car il y a cela de commun que pour acheuer il ne manque qu'vne partie au premier, & deux à l'autre, & c'est en cela que consiste la difference des auantages, & qui doit regler les partis ; de sorte qu'il ne faut proprement auoir égard qu'au nombre des parties qui restent à gagner à l'vn & à l'autre, & non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque comme nous auons déja dit, deux joüeurs se trouuent en mesme estat, quand joüant en deux parties, l'vn en a vne à point, que deux qui joüans en douze parties, l'vn en a vnze à dix.

Il faut donc proposer la question en cette sorte.

Estans proposez deux joüeurs, à chacun desquels il manque vn certain nombre de parties pour acheuer, faire le party.

I'en donneray icy la methode, que ie poursuiuray seulement en deux ou trois Exemples, qui seront si aisez à continüer, qu'il ne sera pas necessaire d'en donner dauantage.

Pour faire la chose generale sans rien obmettre, ie la prendray par le premier Exemple, qu'il est peut estre mal à propos de toucher, parce qu'il est trop clair, ie le fais pourtant pour commencer par le commencement, c'est celuy-cy.

Premier Cas.

Si à vn des joüeurs il ne manque aucune partie, & à l'autre quelques-vnes ; la ſomme entiere appartient au premier, car il l'a gagnée, puiſqu'il ne luy manque aucune des parties dans leſquelles il la deuoit gagner.

Second Cas.

Si à vn des joüeurs il manque vne partie, & à l'autre vne ; le party eſt qu'ils ſeparent l'argent par la moitié, & que chacun prenne la ſienne : cela eſt euident par le ſecond principe. Il en eſt de meſme s'il manque deux parties à l'vn, & deux à l'autre ; & de meſme quelque nombre de parties qui manque à l'vn s'il en manque autant à l'autre.

Troiſiéme Cas.

Si à vn des joüeurs il manque vne partie, & à l'autre deux, voicy l'art de trouuer le party.

Conſiderons ce qui appartiendroit an premier joueur (à qui il ne manque qu'vne partie) en cas de gain de la partie qu'ils vont joüer, & puis ce qui luy appartiendroit en cas de perte.

Il eſt viſible que ſi celuy à qui il ne manque qu'vne partie gagne cette partie qui ſe va ioüer il ne luy en manquera plus, donc tout luy appartiendra par le premier cas. Mais au contraire, ſi celuy à qui il manque deux parties gagne celle qu'ils vont ioüer, il ne luy en manquera plus qu'vne, donc ils ſeront en telle condition, qu'il en manquera vne à l'vn, & vne à l'autre. Donc ils doiuent partager l'argent par la moitié par le deuxieſme cas.

Donc ſi le premier gagne cette partie qui ſe va ioüer il luy appartient tout, & s'il la pert, il luy appartient la moitié, donc en cas qu'ils veüillent ſe ſeparer ſans ioüer cette partie, il luy appartient $\frac{3}{4}$ par le ſecond Corollaire.

Et ſi on veut propoſer vn exemple de la ſomme qu'ils joüent, la choſe ſera bien plus claire.

Poſons que ce ſoit 8. piſtolles ; donc le premier en cas de gain doit auoir le tout, qui eſt 8 piſtolles ; & en cas de perte il doit auoir la moitié qui eſt 4. donc il luy appartient en cas de party, la moitié de 8 † 4, c'eſt à dire *6* piſtolles de 8, car 8 † 4 font 12, dont la moitié eſt *6*.

Quatrieſme Cas.

Si à vn des joüeurs il manque vne partie, & à l'autre trois, le party ſe trouuera de meſme, en examinant ce qui appartient au premier en cas de gain & de perte.

Si le premier gagne il aura toutes ſes parties, & partant tout l'argent, qui eſt par exemple 8.

Si le premier pert, il ne faudra plus que 2 parties à l'autre à qui il en falloit 3. Donc ils ſeront en eſtat qu'il faudra vne partie au premier, & deux à l'autre, & partant par le cas precedent il appartiendra 6 piſtolles au premier.

Donc en cas de gain il luy en faut 8, & en cas de perte 6, donc en cas de party il luy appartient la moitié de ces deux sommes, sçauoir, 7, car 6 † 8 sont 14. dont la moitié est 7.

Cinquiesme Cas.

Si à vn des joüeurs il manque vne partie, & à l'autre quatre, la chose est de mesme.

Le premier en cas de gain gaigne tout, qui est par exemple 8; & en cas de perte il manque vne partie au premier, & 3 à l'autre; donc il luy appartient 7 pistolles de 8; donc en cas de party il luy appartient la moitié de 8. plus la moitié de 7. c'est à dire 7 $\frac{1}{2}$.

Sixiesme Cas.

Ainsi s'il manque vne partie à l'vn, & 5. à l'autre, & à l'infini.

Septiesme Cas.

De mesme s'il manque deux parties au premier, & trois à l'autre: car il faut tousiours examiner les cas de gain & de perte.

Si le premier gagne il luy manquera vne partie, & à l'autre 3. donc par le quatriesme cas il luy appartient 7. de 8.

Si le premier pert il luy manquera deux parties, & à l'autre deux; donc par le deuxiesme cas il appartient à chacun la moitié, qui est 4; donc en cas de gain le premier en aura 7, & en cas de perte il en aura 4; donc en cas de party il aura la moitié de ces deux ensemble, sçauoir 5 $\frac{1}{2}$.

Par cette methode on fera les partis sur toutes sortes de conditions, en prenant tousiours ce qui appartient en cas de gain, & ce qui appartient en cas de perte, & assignant pour le cas de party la moitié de ces deux sommes.

Voyla vne des manieres de faire les partis.

Il y en a deux autres, l'vne par le Triangle Arithmetique, & l'autre par les combinaisons.

Methode pour faire les partys entre deux Ioüeurs qui joüent en plusieurs parties, par le moyen du Triangle Arithmetique.

Auant que de donner cette Methode, il faut faire ce lemme.

Lemme.

Si deux joüeurs joüent à vn jeu de pur hazard, à condition que si le premier gagne, il luy appartiendra vne portion quelconque sur la somme qu'ils joüent, exprimée par vne fraction, & que s'il perd, il luy appartiendra vne moindre portion ſur la meſme ſomme, exprimée par vne autre fraction. S'ils veulent ſe ſeparer ſans joüer, la condition du party ſe trouuera en cette ſorte. Soient reduites les deux fractions à meſme denomination ſi elles n'y ſont pas, ſoit priſe vne fraction dont le numerateur ſoit la ſomme des deux numerateurs, & le denominateur double des precedens. Cette fraction exprime la portion qui appartient au premier ſur la ſomme qui eſt au jeu.

Par exemple, qu'en cas de gain il appartienne les $\frac{3}{5}$ de la ſomme qui eſt au jeu, & qu'en cas de perte Il luy en appartienne $\frac{1}{5}$.

Ie dis que ce qui luy appartient en cas de party ſe trouuera en prenant la ſomme des numerateurs qui eſt 4, & le double du denominateur qui eſt 10. dont on fait la fraction $\frac{4}{10}$.

Car par ce qui a eſté demonſtré au 2. Coroll. il falloit aſſembler les cas de gain & de perte & en prendre la moitié; Or la ſomme des deux fractions $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{5}$ eſt $\frac{4}{5}$ qui ſe fait par l'addition des numerateurs, & ſa moitié ſe trouue en doublant le denominateur, & ainſi l'on a $\frac{4}{10}$ ce qu'il falloit demonſtrer.

Or ces regles ſont generales, & ſans exception, quoy qui reuienne en cas de perte ou de gain; car ſi par exemple, en cas de gain il appartient $\frac{1}{2}$, & en cas de perte, rien; en reduiſant les deux fractions à meſme denominateur, on aura $\frac{1}{2}$ pour le cas de gain & $\frac{0}{2}$ pour le cas de perte, donc en cas de party il faut cette fraction $\frac{1}{4}$ dont le numerateur égale la ſomme des autres, & le denominateur eſt double du precedent.

Ainſi ſi en cas de gain il appartient tout, & en cas de perte $\frac{1}{3}$ en reduiſant les fractions à meſme denomination, on aura $\frac{3}{3}$ pour pour le cas de gain, & $\frac{1}{3}$ pour celuy de la perte; donc en cas de party il appartient $\frac{4}{6}$.

Ainſi ſi en cas de gain il appartient tout, & en cas de perte rien, le party ſera viſiblement $\frac{1}{2}$, car le cas de gain eſt $\frac{1}{1}$, & le cas de perte $\frac{0}{1}$, donc le party eſt $\frac{1}{2}$.

Et ainſi de tous les cas poſſibles.

Probleſme I. Prop. I.

Eſtans propoſez deux joü[illegible]rs, à chacun deſquels il manque vn certain nombre de parties pour acheuer, trouuer par le Triangle Arithmetique le party qu'il faut faire (s'ils veulent se separer sans joüer) eu égard aux parties qui manquent à chacun.

Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble. En suite soient prises dans cette base autant de cellules continües à commencer par la premiere, qu'il manque de parties au premier joüeur, & qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules, qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'vne à l'autre comme les auantages des joüeurs reciproquement. De sorte que si la somme qu'ils joüent est égale à la somme des nombres de toutes les cellules de la base, il en appartiendra à chacun ce qui est contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre, & s'ils joüent vne autre somme il leur en appartiendra à proportion.

Par exemple qu'il y ait deux joüeurs, au premier desquels il manque deux parties, & à l'autre 4, il faut trouuer le party.

Soient adjoustez ces deux nombres 2, & 4, & soit leur somme, 6, soit prise la sixiéme base du Triangle Arithmetique P δ dans laquelle il y a par consequent six cellules P, M, F, ω, S, δ. Soient prises autant de cellules à commencer par la premiere P. qu'il manque de parties au premier joueur, c'est à dire les deux premieres P. M; donc il en reste autant que de parties à l'autre, c'est à dire 4. F, ω, S, δ.

Ie dis que l'auantage du premier est à l'auantage du second, comme F † ω † S † δ, à P † M. c'est à dire que si la somme qui se joüe est égale à P † M † F † ω † S † δ, il en appartient à celuy à qui il manque deux parties la somme des 4 cellules, δ † S † ω † F; & à celuy à qui il manque 4 parties, la somme des deux cellules P † M. Et s'ils jouent vn autre somme, il leur en appartient à proportion.

Et pour le dire generalement, quelque somme qu'ils jouent, il en appartient au premier vne portion exprimée par cette fraction,

$$\frac{F \dagger \omega \dagger S \dagger \delta}{P \dagger M \dagger F \dagger \omega \dagger S \dagger \delta}$$

dont le numerateur est la somme des 4. cellules de l'autre, & le denominateur la somme de toutes les cellules; & à l'autre vne portion exprimée par cette fraction $\frac{P \dagger M}{P \dagger M \dagger F \dagger \omega \dagger S \dagger \delta}$ dont le numerateur est la somme des deux cellules de l'autre, & le denominateur la mesme somme de toutes les cellules.

Et s'il manque vne partie à l'vn, & 5. à l'autre, il appartient au premier la somme des 5. premieres cellules $P \dagger M \dagger F \dagger \omega \dagger S$, & à l'autre la somme de la cellule δ.

Et s'il manque 6. parties à l'vn, & 2. à l'autre, le party s'en trouuera dans la huictiéme base, dans laquelle les six premieres cellules contiennent ce qui appartient à celuy à qui il manque deux parties, & les deux autres ce qui appartient à celuy à qui il en manque 6. Et ainsi à l'infiny.

Quoy que cette proposition ait vne infinité de cas, ie la demonstreray neantmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le 1. que la seconde base contient les partis des joüeurs ausquels il manque deux parties en tout.

Le 2. que si vne base quelconque contient les partys de ceux ausquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suiuante sera de mesme, c'est à dire quelle contiendra aussi les partis des joüeurs ausquels il manque autant de parties quelle a de cellules.

D'où ie conclus en vn mot que toutes les bases du Triangle Arithmetique ont cette proprieté, car la seconde l'a par le premier lemme, donc par le second lemme, la troisiesme l'a aussi, & par consequent la quatriesme, & aussi à l'infiny: Ce qu'il falloit demonstrer. Il faut donc seulement demonstrer ces 2. lemmes.

Le 1. est euident de luy mesme, car s'il manque vne partie à l'vn, & vne à l'autre, il est euident que leurs conditons sont comme φ à σ, c'est à dire comme, 1, à 1, & qu'il appartient à chacun cette fraction,

$$\frac{\sigma}{\varphi \dagger \sigma} \quad \textit{qui est,} \quad \frac{1}{2}.$$

Le 2. se demonstrera de cette sorte.

Si vne base quelconque comme la quatriéme $D\lambda$ contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties; c'est à dire que s'il manque une partie au premier, & trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joüe, soit celle qui est exprimée par cette fraction, $\frac{D \dagger B \dagger \theta}{D \dagger B \dagger \theta \dagger \lambda}$ *qui a pour denominateur la somme des cellules de cette base, & pour numerateur ses trois premieres; & que s'il manque deux parties à l'vn, & deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier soit,* $\frac{D \dagger B.}{D \dagger B \dagger \theta \dagger \lambda}$ *; & que s'il manque trois parties au premier, & vne à l'autre, la fraction du premier soit* $\frac{D}{D \dagger B \dagger \theta \dagger \lambda}$ *& &c.*

Ie dis

Ie dis que la cinquiéme base contient aussi les partys de ceux ausquels il manque cinq parties, & que s'il manque par exemple deux parties au premier, & trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joüe, est exprimée par cette fraction,

$$\frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu.}$$

Car pour sçauoir ce qui appartient à deux joüeurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui appartiendroit au premier en cas de gain, & celle qui luy appartiendroit en cas de perte, les mettre à mesme denomination, si elles n'y sont pas, & en former vne fraction, dont le numerateur soit la somme des deux autres, & le denominateur double de l'autre, par le lemme precedent.

Examinons donc les fractions qui appartiendroient à nostre premier joüeur en cas de gain & de perte.

Si le premier à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont joüer, il ne luy manquera plus qu'vne partie, & à l'autre tousiours trois, donc il leur manque quatre parties en tout: donc, par l'hypothese, leur party se trouue en la base quatriesme, & il appartiendra au premier cette fraction, $\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda.}$

Si au contraire le premier perd, il luy manquera tousiours deux parties, & deux seulement à l'autre, donc par l'hypothese la fraction du premier sera, $\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda.}$

Donc en cas de party il appartiendra au premier cette fraction,

$$\frac{D + B + \theta, + D + B}{2D + 2B + 2\theta + 2\lambda;} \quad \text{c'est à dire,} \quad \frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu.}$$

Ce qu'il falloit demonstrer.

Ainsi cela se demonstre en toutes les autres bases sans aucune difference, parce que le fondement de cette preuue est qu'vne base est tousiours double de sa precedente, par la 7. Conseq. & que, par la dixiesme Consequence, tant de cellules qu'on voudra d'vne mesme base sont égales à autant de la base precedente (qui est tousiours le denominateur de la fraction en cas de gain) plus encores aux mesmes cellules excepté vne (qui est le numerateur de la fraction en cas de perte) ce qui estant vray generalement par tout la demonstration sera toûjours sans obstacle & vniuerselle.

Problesme 2. Prop. 2.

Estans proposez deux joüeurs, qui joüent chacun vne mesme somme en vn certain nombre de parties proposé; Trouuer dans le Triangle Arithmetique la valeur de la derniere partie sur l'argent du perdant.

Par exemple, que deux joüeurs joüent chacun trois pistolles en quatre parties; on demande la valeur de la derniere partie sur les trois pistolles du perdant.

Soit prise la fraction qui a l'vnité pour numerateur & pour denominateur la somme des cellules de la base quatriesme, puis qu'on joüe en quatre parties; Ie dis que cette fraction, est la valeur de la derniere partie sur la mise du perdant.

Car si deux joüeurs joüans en quatre parties, l'vn en a trois à point, & qu'ainsi il en manque vne au premier, & quatre à l'autre, il a esté demonstré que ce qui appartient au premier pour le gain qu'il a fait de ses trois premieres parties, est exprimé par cette fraction, $\frac{H \dagger E \dagger C \dagger R}{H \dagger E \dagger C \dagger R \dagger \mu}$, *qui a pour denominateur la somme des cellules de la cinquiesme base, & pour numerateur ses quatre premieres cellules, donc il ne reste sur la somme totale des deux mises que cette fraction* $\frac{\mu}{H \dagger E \dagger C \dagger R \dagger \mu}$, *laquelle seroit acquise à celuy qui a déja les trois premieres parties en cas qu'il gagnast la derniere; Donc la valeur de cette derniere sur la somme des deux mises est* $\frac{\mu}{H \dagger E \dagger C \dagger R \dagger \mu}$, c'est à dire $\frac{\text{l'vnité}}{2D \dagger 2B \dagger 2\theta \dagger 2\lambda}$. *Or puis que la somme totale des mises est* $2D \dagger 2B \dagger 2\theta \dagger 2\lambda$. *La somme de chaque mise est* $D \dagger B \dagger \theta \dagger \lambda$, *donc la valeur de la derniere partie sur la seule mise du perdant est cette fraction* $\frac{1}{D \dagger B \dagger \theta \dagger \lambda}$ *double de la precedente, & laquelle a pour numerateur l'vnité, & pour denominateur la somme des cellules de la quatriesme base.*

Ce qu'il falloit demonstrer.

Problesme 3. Prop. 3.

Estans proposez deux joüeurs, qui joüent chacun vne mesme somme en vn certain nombre de parties donné; Trouuer dans le Triangle Arithmetique, la valeur de la premiere partie sur la mise du perdant.

Par exemple, que deux joüeurs joüent chacun trois pistolles en quatre parties; on demande la valeur de la premiere sur la mise du perdant.

Soit adiousté au nombre, 4, le nombre, 3, moindre de l'vnité & soit la somme, 7, soit prise la fraction, qui ait pour denominateur toutes les cellules de la septiesme base, & pour numerateur la cellule de cette base qui se rencontre dans la diuidente, sçauoir cette fraction

$$\frac{\rho}{V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta}$$

Ie dis quelle satisfait au Problesme.

Car si deux joüeurs joüans en quatre parties, le premier en a vne à point, il en restera, 3, à gagner au premier, & 4, à l'autre; donc il appartient au premier sur la somme des deux mises cette fraction

$$\frac{V + Q + K + \rho}{V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta}$$

qui a pour denominateur toutes les cellules de la septiesme base, & pour numerateur ses quatre premieres cellules.

Donc il luy appartient $V + Q + K + \rho$ *sur la somme totale des deux mises exprimée par* $V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta$; *Mais cette derniere somme estant l'assemblage des deux mises, il en auoit mis au jeu la moitié, sçauoir* $V + Q + K + \frac{1}{2}\rho$ (*car* $V + Q + K$, *sont égaux à* $\zeta + N + \xi$)

Donc il a $\frac{1}{2}\rho$, *c'est à dire*, ω, *plus qu'il n'auoit en entrant au jeu; donc il a gagné sur la somme totale des deux mises vne portion exprimée par cette fraction*

$$\frac{\omega}{V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta}$$

donc il a gagné sur la mise du perdant vne portion qui sera double de celle-là, sçauoir celle qui est exprimée par cette fraction.

$$\frac{\rho}{V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta}$$

Donc le gain de la premiere partie luy a acquis cette fraction, donc sa valeur est telle.

Corollaire.

Donc la valeur de la premiere partie de deux, sur la mise du perdant, est exprimée par cette fraction $\frac{1}{2}$.

Car en prenant cette valeur suiuant la regle qui vient d'en estre donnée, il faut prendre la fraction qui a pour denominateur les cellules de la troisiesme base (parce que le nombre des parties en quoy on joüe est, 2, & le nombre moindre de l'vnité est, 1, qui auec, 2, fait 3) & pour numerateur, la cellule de cette base qui est dans la diuidente, donc on aura cette fraction, $\frac{\psi}{A + \psi + \pi}$

Or le nombre de la cellule ψ *est, 2, & les nombres des cellules* A, † ψ, † π, *sont,* 1 † 2 † 1. *Donc on a cette fraction*

$\frac{2}{1 + 2 + 1}$ c'est à dire, $\frac{2}{4}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$.

Donc le gain de la premiere partie luy a acquis cette fraction, donc sa valeur est telle. Ce qu'il falloit demonstrer.

Probleme 4. Prop. 4.

Estans proposez deux joüeurs, qui joüent chacun vne mesme somme en vn certain nombre de parties donné; Trouuer par le Triangle Arithmetique la valeur de la seconde partie sur la mise du perdant.

Soit le nombre donné des parties dans lesquelles on joüe 4; Il faut trouuer la valeur de la deuxiesme partie sur la mise du perdant.

Soit prise la valeur de la premiere partie par le Problesme precedent. Ie dis qu'elle est la valeur de la seconde.

Car deux joüeurs joüans en quatre parties, si l'vn en a deux à point, la fraction qui luy appartient est celle-cy $\frac{P + M + F + \omega}{P + M + F + \omega + S + \delta}$ *qui a pour denominateur la somme des cellules de la sixiesme base, & pour numerateur la somme des quatre premieres, mais il en auoit mis au jeu cette fraction* $\frac{P + M + F}{P + M + F + \omega + S + \delta}$ *sçauoir la moitié du tout.*

Donc il luy reste de gain cette fraction, $\frac{\omega}{P + M + F + \omega + S + \delta}$, *qui est la mesme chose que celle-cy,*

$\frac{p}{V \dagger Q \dagger K \dagger \rho \dagger \xi \dagger N \dagger \zeta}$ *donc il a gagné ſur la moitié de la ſomme entiere, c'eſt à dire ſur la miſe du perdant cette fraction double de la precedente* $\frac{2p}{V \dagger Q \dagger K \dagger \rho \dagger \xi \dagger N \dagger \zeta}$

Donc le gain des deux premieres parties, luy a acquis cette fraction ſur l'argent du perdant; qui eſt le double de ce que la premiere partie luy auoit acquis par la precedente, donc la ſeconde partie luy en a autant acquis que la premiere.

Concluſion.

On peut aiſement conclurre par le rapport qu'il y a du Triangle Arithmetique aux partys qui ſe doiuent faire entre deux joüeurs, que les proportions des cellules qui ont eſté données dans le Traitté du Triangle, ont des conſequences qui s'eſtendent à la valeur des parties, qui ſont bien aiſées à tirer; & dont i'ay fait vn petit diſcours en traittant des partys, qui donne l'intelligence & le moyen de les eſtendre plus auant.

VSAGE DV TRIANGLE ARITMETIQVE, Pour trouuer les puissances des Binomes & Apotomes.

S'Il est proposé de trouuer la puissance quelconque, comme le quatriesme degré d'vn binome, dont le premier nom sont A, l'autre l'vnité, c'est à dire qu'il faille trouuer le quarré-quarré de A † 1.

Il faut prendre dans le Triangle Arithmetique la base cinquiesme, sçauoir celle dont l'exposant, 5, est plus grand de l'vnité que 4, exposant de l'ordre proposé; Les cellules de cette cinquiesme base sont, 1, 4, 6, 4, 1. Dont il faut prendre le premier nombre, 1, pour coefficient de A au degré proposé, c'est à dire de A^4. En suitte il faut prendre le second nombre de la base, qui est 4, pour coefficient de A au degré prochainement inferieur, c'est à dire de A^3, & prendre le nombre suiuant de la base, sçauoir, 6, pour coefficient de A au degré inferieur, sçauoir A^2, & le nombre suiuant de la base, sçauoir, 4, pour coefficient de A au degré inferieur, sçauoir, A racine, & prendre le dernier nōbre de la base, 1, pour nombre absolu. Et ainsi on aura, 1 A^4 † 4 A^3 † 6 A^2 † 4 A † 1. qui sera la puissance quarré-quarrée du binome A † 1. De sorte que si A (qui represente tout nombre) est l'vnité; & qu'ainsi le binome A † 1 soit le binaire, cette puissance 1 A^4 † 4 A^3 † 6 A^2 † 4 A † 1. sera maintenant 1, 1^4 † 4, 1^3 † 6, 1^2 † 4, 1 † 1.

C'est à dire, Vne fois le quarré-quarré de l'vnité A, c'est à dire,	1
Quatre fois le cube de, 1, c'est à dire,	4
Six fois le quarré de 1, c'est à dire,	6
Quatre fois l'vnité, c'est à dire,	4
Plus l'vnité,	1
qui adjoustez font	16

Et en effet le quarré-quarré de 2 est 16.

Si A est vn autre nombre, comme, 4, & partant que le binome A † 1 soit, 5, alors son quarré-quarré sera tousiours suiuant cette methode, 1 A^4 † 4 A^3 † 6 A^2 † 4 A † 1, qui signifie maintenant 1, 4^4 † 4, 4^3 † 6, 4^2 † 4, 4 † 1.

C'est à dire, Vne fois le quarré-quarré de 4, sçauoir,	256,
Quatre fois le cube de 4, sçauoir	256
Six fois le quarré de 4	96
Quatre fois la racine 4	16
Plus l'vnité	1
Dont la somme	625

Fait le quarré-quarré de 5. Et en effet le quarré-quarré de 5 est 625.

Et ainsi des autres exemples.

Si on veut trouuer le mesme degré du binome $A \dagger 2$.

Il faut prendre de mesme, $1\, A^4 \dagger 4\, A^3 \dagger 6\, A^2 \dagger 4\, A \dagger 1$.

Et en suitte escrire ces quatre nombres 2, 4, 8, 16, qui sont les quatre premiers degrez de 2, sous les nombres, 4, 6, 4, 1, c'est à dire sous chacun des nombres de la base, en laissant le premier en cette sorte :

$$\begin{array}{ccccc} 1\, A^4 \dagger & 4\, A^3 \dagger & 6\, A^2 \dagger & 4\, A \dagger & 1 \\ & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

Et multiplier les nombres qui se répondent l'vn par l'autre.

$$\begin{array}{ccccc} 1\, A^4 \dagger & 4\, A^3 \dagger & 6\, A^2 \dagger & 4\, A^1 \dagger & 1 \\ & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline \end{array}$$

En cette sorte $1\, A^4 \dagger 8\, A^3 \dagger 24\, A^2 \dagger 32\, A^1 \dagger 16$

Et ainsi on aura le quarré-quarré du binome $A \dagger 2$. De sorte que si A est l'vnité, ce quarré-quarré sera tel :

Vne fois le quarré-quarré de l'vnité A,	1
Huict fois le cube de l'vnité	8
24, 1^2	24
32, 1	32
Plus	16
Dont la somme	81

Sera le quarré-quarré de 3. Et en effect 81 est le quarré-quarré de 3.

Et si A est 2, lors $A \dagger 2$ sera 4, & son quarré-quarré sera,

Vne fois le quarré quarré de A ou de 2, sçauoir,	16,
8, 2^3	64
24, 2^2	96
32, 2	64
Plus	16
Dont la somme	256

Sera le quarré-quarré, de 4

De la mesme maniere on trouuera le quarré-quarré de $A \dagger 3$

En mettant de la mesme sorte, $A^4 \dagger 4\, A^3 \dagger 6\, A^2 \dagger 4\, A \dagger 1$

Et au dessous les nombres 3 9 27 81

qui sont les 4. prem. degrez de 3, & multiplians les nombres correspondans, on trouuera le quarré-quarré de $A \dagger 3$. $1\, A^4\ 12\, A^3 \dagger 54\, A^2 \dagger 108\, A \dagger 81$.

Et ainsi à l'infiny. Si au lieu du quarré-quarré on veut le quarré cube, ou le cinquiesme degré, il faut prendre la base sixiesme, & en vser comme i'ay dit de la cinquiesme ; & ainsi de tous les autres degrez.

On trouuera de mesmes les puissances des Apotomes, $A-1$, $A-2$ &c. La methode en est toute semblable, & ne differe qu'aux signes, car les ſignes de † & de — ſe ſuiuent touſiours alternatiuement, & le ſigne de † eſt touſiours le premier.

Ainſi le quarré-quarré de $A - 1$ ſe trouuera de cette ſorte. Le quarré-quarré de $A + 1$ eſt par la regle precedente $1 A^4 + 4 A^3 + 6 A^2 + 4 A + 1$ Donc en changeant les ſignes comme i'ay dit, on aura.

$$1 A^4 - 4 A^3 + 6 A^2 - 4 A + 1$$

Ainſi le cube de $A - 2$ ſe trouuera de meſmes.
Car le cube de $A + 2$ par la regle precedente eſt

$$A^3 + 6 A^2 + 12 A + 8.$$

Donc le cube de $A - 2$ ſe trouuera en changeant les ſignes.

$$+ A^3 - 6 A^2 + 12 A - 8.$$

Et ainſi à l'infiny.

Ie ne donne point la demonſtration de tout cela, parce que d'autres en ont déja traitté, comme Herigogne. Outre que la choſe eſt euidente d'elle-meſme.

TRAITTE' DES ORDRES NVMERIQVES.

IE presuppose qu'on a veu le Traitté du Triangle Arithmetique, & son vsage pour les Ordres Numeriques ; Autrement i'y renuoye ceux qui veulent voir ce discours qui en est proprement vne suitte.

I'y ay donné la definition des ordres numeriques, & ie ne la repeteray pas.

I'y ay monstré aussi que le Triangle Arithmetique n'est autre chose que la table des ordres numeriques ; en suitte dequoy il est euident que toutes les proprietez qui ont esté données dans le Triangle Arithmetique entre les cellules ou entre les rangs, conuiennent aux ordres numeriques ; De sorte que si peu qu'on ayt l'art d'appliquer les proprietez des vns aux autres, il n'y a point de proposition dans le traitté du Triangle qui n'ait ses consequences touchant les diuers ordres. Et cela est tout ensemble & si facile & si abondant, que ie suis fort esloigné de vouloir tout donner expressement, i'aymerois mieux laisser tout à faire, puisque la chose est si aysée ; mais pour me tenir entre ces deux extremitez, i'en donneray seulement quelques exemples, qui ouuriront le moyen de trouuer tous les autres.

Par exemple. De ce qui a esté dit dans vne des Consequences du Traitté du Triangle, *que chaque cellule, égale celle qui la precede dans son rang parallele, plus celle qui la precede dans son rang perpendiculaire.* I'en forme cette proposition touchant les ordres numeriques.

Proposition I.

Vn nombre de quelque ordre que ce soit, égale celuy qui le precede dans son ordre, plus son corradical de l'ordre precedent. Et par consequent, le quatriéme, par exemple, des pyramidaux, égale le troisiéme pyramidal, plus le quatriéme triangulo triangulaire. Ainsi le cinquiéme triangulo-triangulaire, égale le quatriéme triangulo-triangulaire, plus le cinquiéme pyramidal, &c.

Autre exemple. De ce qui a esté monstré dans le Triangle, *que chaque cellule comme, F, égale E † B † ✝ † σ; c'est à dire, celle qui la precede dans son rang parallele, plus toutes celles qui precedent cette precedente dans son rang perpendiculaire;* Ie forme cette proposition.

Proposition 2.

Vn nombre de quelque ordre que ce soit, égale tous ceux tant de son ordre que de tous les precedens, dont la racine est moindre de l'vnité que la sienne; & partant le quatriéme des pyramidaux, par exemple, égale le troisiéme des pyramidaux, plus le troisiéme des triangulaires, plus le troisiéme des naturels, plus le troisiéme des vnitez, c'est à dire l'vnité.

D'où on peut maintenant tirer d'autres consequences, comme celle-cy que ie donne pour ouurir le chemin à d'autres pareilles.

Proposition 3.

Chaque nombre de quelque cellule que ce soit, est composé d'autant de nombres qu'il y a d'ordres depuis le sien iusqu'au premier inclusiuement, chacun desquels nombres est de chacun de ces ordres. Ainsi vn triangulo-triangulaire, est composé d'vn autre triangulo-triangulaire, d'vn pyramidal, d'vn triangulaire, d'vn naturel, & de l'vnité.

Et si on veut en faire vn problesme, il pourra s'enoncer ainsi.

Proposition 4. Problesme.

Estant donné vn nombre d'vn ordre quelconque, trouuer vn nombre dans chacun des ordres depuis le premier iusqu'au sien inclusiuement, dont la somme égale le nombre donné.

La solution en est facile, il faut prendre dans tous ces ordres, les nombres dont la racine est moindre de l'vnité que celle du nombre donné.

Autre exemple. De ce que *les cellules correſpondantes ſont égales entr'-elles*, il ſe conclud.

Propoſition 5.

Que deux nombres de differens ordres ſont égaux entr'eux, ſi la racine de l'vn, eſt le meſme nombre que l'expoſant de l'ordre de l'autre. Et partant, le troiſiéme pyramidal, eſt égal au quatriéme triangulaire. Le cinquiéme du huictiéme ordre, eſt le meſme que le huictiéme du cinquiéme ordre, &c.

On n'auroit iamais acheué: Par exemple.

Propoſition 6.

Tous les quatriémes nombres de tous les ordres, ſont les meſmes que tous les nombres du quatriéme ordre, &c.

Parce que *les rangs paralleles & perpendiculaires qui ont vn meſme expoſant, ſont composez de cellules toutes pareilles.*

Par cette methode on trouuera vn rapport admirable en tout le reſte comme celuy-cy.

Propoſition 7.

Vn nombre de quelque ordre que ce ſoit, eſt au prochainement plus grand dans le meſme ordre; comme la racine du moindre, eſt à cette meſme racine jointe à l'expoſant de l'ordre, moins l'vnité.

Ce qui s'enſuit de la quatorziéme conſequence du triangle, où il eſt monſtré que *chaque cellule eſt à celle qui la precede dans ſon rang parallele, comme l'expoſant de la baſe de cette precedente, à l'expoſant de ſon rang perpendiculaire.*

Et afin de ne rien cacher de la maniere dont ſe tirent ces correſpondances, i'en monſtreray le rapport à découuert: Il eſt vn peu plus difficile icy que tantoſt, parce qu'on ne void point de rapport, de la baſe des triangles, auec les ordres des nombres; mais voicy le moyen de le trouuer. Au lieu *de l'expoſant de la baſe*, dont i'ay parlé dans cette quatorziéme conſequence, il faut ſubſtituer, *l'expoſant du rang parallele, plus l'expoſant du rang perpendiculaire moins l'vnité.* Ce qui produit le meſme nombre, & auec cet auantage, qu'on connoiſt le rapport qu'il y a de ces expoſans, auec les ordres numeriques: car on ſçait, qu'en ce nouueau langage, il faut dire, *l'expoſant de l'ordre plus la racine moins l'vnité.* Ie dis tout cecy afin de faire toucher la methode pour faire & pour faciliter ces reductions.

Ainſi on trouuera que,

Propoſition 8.

Vn nombre de quelque ordre que ce ſoit, eſt à ſon corradical de l'ordre ſuiuant, comme l'expoſant de l'ordre du moindre, eſt à ce meſme expoſant joint à leur racine commune moins l'vnité.

C'eſt la 13. conſequence du Tr. Ainſi on trouuera encore que.

Propoſition 9.

Vn nombre de quelque ordre que ce ſoit, eſt à celuy de l'ordre precedent, dont la racine eſt plus grande de l'vnité que la ſienne, comme la racine du premier, à l'expoſant de l'ordre du ſecond.

Ce n'eſt que la meſme choſe que la douziéme conſequence du Triangle Arithmetique.

I'en laiſſe beaucoup d'autres, chacune deſquelles, auſſi bien que de celles que ie viens de donner, peut encore eſtre augmentée de beaucoup par de differentes enonciations: car au lieu d'exprimer ces proportions comme i'ay fait, en diſant *qu'vn nombre eſt à vn autre comme vn troiſiéme à vn quatriéme.* Ne peut-on pas dire que, *le rectangle des extremes eſt égal à celuy des moyens.* Et ainſi multiplier les propoſitions, & non ſans vtilité; car eſtans regardées d'vn autre coſté elles donnent d'autres ouuertures.

Par exemple, ſi on veut tourner autrement cette derniere propoſition; on peut l'enoncer ainſi.

Propoſition 10.

Vn nombre de quelque ordre que ce ſoit, eſtant multiplié par la racine precedente, égale l'expoſant de ſon ordre, multiplié par le nombre de l'ordre ſuiuant procedant de cette racine.

Et parce que, quand quatre nombres ſont proportionaux, le rectangle des extremes, ou des moyens, eſtant diuiſé par vn des deux autres, donne pour quotient le dernier; on peut dire ainſi.

Proposition II.

Vn nombre de quelque ordre que ce soit, estant multiplié par la racine precedente, & diuisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suiuant qui procede de cette racine.

Les manieres de tourner vne mesme chose sont infinies; en voicy vn illustre exemple, & bien glorieux pour moy. Cette mesme proposition que ie viens de rouler en plusieurs sortes est tombée dans la pensée de nostre celebre Conseiller de Thoulouze Monsieur de Fermat; Et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eust donné la moindre lumiere, ny moy à luy, il écriuoit dans sa Prouince ce que i'inuentois à Paris, heure pour heure, comme nos lettres escrittes & receües en mesme temps le témoignent. Heureux d'auoir concouru en cette occasion, comme i'ay fait encore en d'autres d'vne maniere tout à fait estrange, auec vn homme si grand & si admirable, & qui dans toutes les recherches de la plus sublime geometrie est dans le plus haut degré d'excellence, comme ses ouurages, que nos longues prieres ont enfin obtenu de luy, le feront bien-tost voir à tous les geometres de l'Europe qui les attendent. La maniere dont il a pris cette mesme proposition est telle.

En la progression naturelle qui commence par l'vnité, vn nombre quelconque estant mené dans le prochainement plus grand, produit le double de son triangle.

Le mesme nombre estant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.

Le mesme nombre mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulo-triangulaire; Et ainsi à l'infiny, par vne methode generale & vniforme.

Voila comment on peut varier les enonciations. Ce que ie monstre en cette proposition s'entendant de toutes les autres, ie ne m'arresteray plus à cette maniere accommodante de traitter les choses, laissant à chacun d'exercer son genie en ces recherches, où doit consister toute l'estude des Geometres: car si on ne sçait pas tourner les propositions à tous sens, & qu'on ne se serue que du premier biais qu'on a enuisagé, on n'ira iamais bien loing: ce sont ces diuerses routes qui ouurent les consequences nouuelles, & qui, par des enonciations assorties au sujet, lient des propositions, qui sembloient n'auoir aucun rapport dans les termes où elles estoient conceües d'abord. Ie continüeray donc ce sujet en la maniere dont on a accoustumé de traitter la Geometrie, & ce que i'en diray sera comme vn nouueau traitté des ordres numeriques; & mesme ie le donneray en Latin, parce qu'il se rencontre que ie l'ay escrit ainsi en l'inuentant.

DE NVMERICIS ORDINIBVS TRACTATVS.

TRianguli Arithmetici tractatum, ipsiusque circa numericos ordines vsum, supponit tractatus iste, vt & plerique è sequentibus: huc ergo mittitur lector horum cupidus, ibi noscet quid sint ordines numerici, nempe, vnitates, numeri naturales, trianguli, pyramides, triangulo-trianguli, &c. Quæ cum perlegerit facilè hæc assequetur.

Hic propriè ostenditur connexio inter numerum cuiusuis ordinis cum suâ radice & exponente sui ordinis, quæ talis est, vt ex his tribus, datis duobus quibuslibet tertius inueniatur. Verbi gratia, datâ radice & exponente ordinis, numerus ipse datur; sic dato numero & sui ordinis exponente, radix elicitur; nec non ex dato numero & radice, exponens ordinis inuenitur: hæc constituunt Tria priora problemata, quartum de summâ ordinum agit.

DE NVMERICORVM ORDINVM COMPOSITIONE.

Problema I.

Datis, numeri cujuslibet, radice & exponente ordinis, componere numerum.

Productus numerorum qui præcedunt radicem, diuidat productum totidem numerorum quorum primus sit exponens ordinis, Quotiens erit quæsitus numerus.

Propositum sit inuenire numerum ordinis verbi gratia tertij, radicis vero quintæ.

Productus numerorum, 1, 2, 3, 4, *qui præcedunt radicem*, 5, *nempe*, 24, *diuidat productum totidem numerorum continuorum*, 3, 4, 5, 6, *quorum primus sit* *exponens ordinis, 3, nempe, 360, Quotiens 15, est numerus quæsitus.*

Nec difficilis demonstratio, eâdem enim prorsus constructione, inuenta est, ad finem tractatus Triang. Arith. cellula quintæ seriei perpendicularis, tertiæ vero seriei parallelæ; cujus cellulæ numerus, idem est ac numerus quintus ordinis tertij, qui quæritur.

Potest autem & sic resolui idem problema.

Productus numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, diuidat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit radix, Quotiens est quæsitus.

Sic in proposito exemplo, productus numerorum, 1, 2, qui præcedunt exponentem ordinis, 3, nempe, 2; diuidat productum totidem numerorum, 5, 6, quorum primus sit radix, 5, nempe, 30, Quotiens, 15, est numerus quæsitus.

Nec differt hæc constructio à præcedente, nisi in hoc solo, quod in alterâ idem fit de radice, quod fit in alterâ de exponente ordinis. Perinde ac si idem esset inuenire, quintum numerum, ordinis tertij, ac tertium numerum ordinis quinti, Quòd quidem verum esse iam ostendimus.

Hinc autem obiter colligere possumus arcanum numericum, cum enim ambo illi quotientes, 15, sint ijdem, constat, diuisores esse inter se vt diuidendos. Animaduertemus itaque.

Si sint duo quilibet numeri; Productus omnium numerorum primum ex ambobus propositis præcedentium, est ad productum totidem numerorum quorum primus est secundus ex his ambobus, vt productus ex omnibus qui præcedunt secundum ex illis ambobus, ad productum totidem numerorum continuorum quorum primus est primus ex ijs ambobus propositis.

Hæc qui prosequeretur, & demonstraret, & noui fortassis tractatus materiam reperiret, nunc autem quia extra rem nostram sunt sic pergimus.

DE NVMERICORVM ORDINVM RESOLVTIONE.

Problema 2.

Dato numero, ac exponente sui ordinis, inuenire radicem.

Potest autem & sic enuntiari.

Dato quolibet numero, inuenire radicem maximi numeri

ordinis

ordinis numerici cuiuſlibet propoſiti, qui in dato numero contineatur.

Sit Datus numerus quilibet v.g. 58, *ordo vero numericus quicunque propoſitus verbi gratia* ſextus. *Oportet igitur inuenire radicem* ſexti *ordinis numeri*, 58

Exhibeatur ex vnâ parte exponens ordinis, 6	*Et continuò*	*Exponatur ex alterâ parte numerus datus,* 58
Multiplicetur ipſe, 6, *per numerum* 7, *proximè majorem ſitque productus,* 42	*Et continuò*	*Multiplicetur ipſe numerus per,* 2, *ſitque productus,* 116
Multiplicetur iſte productus per proximè ſequentem multiplicatorem, 8, *ſitque productus,* 336	*Et continuò*	*Multiplicetur ipſe productus per proximè ſequentem multiplicatorem,* 3, *ſitque productus,* 348
Multiplicetur iſte productus per proximè ſequentem multiplicatorem, 9, *ſitque productus,* 3024	*Et continuò*	*Multiplicetur iſte productus per proximè ſequentem multiplicatorem,* 4, *ſitque productus.* 1392.

Et ſic in infinitum, donec vltimus productus exponentis, 6, *nempe,* 3024, *major euadat quam vltimus productus numeri dati nempe,* 1392; *Et tunc abſoluta eſt operatio, vltimus enim multiplicator dati numeri, nempe* 4, *eſt radix quæ quærebatur.*

Igitur Dico, numerum ſexti ordinis cujus radix eſt, 4, nempe, 56, maximum eſſe eius ordinis qui in numero dato contineatur, ſeu Dico numerum ſexti ordinis cujus radix eſt, 4, nempe 56, non eſſe majorem dato numero, 58. Numerum verò eiuſdem ordinis proximè majorem ſeu cuius radix eſt, 5, nempe 126, eſſe majorem numero dato, 58.

Etenim productus ille vltimus numeri dati nempe 1392, factus est ex numero dato, 58, multiplicato per productum numerorum, 1, 2, 3, 4, nempe, 24, productus verò præcedens hunc vltimum nempe, 348, factus est ex numero dato, 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, nempe, 6.

Ergo productus numerorum, 6, 7, 8, non est major producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per 58. Productus verò numerorum 6, 7, 8, 9, est major producto numerorum, 1, 2, 3, 4, multiplicato per 58, *ex constructione*.

Iam numerus ordinis *sexti* cuius radix est, 4 nempe, 56 multiplicatus per numeros, 1, 2, 3, æquatur producto numerorum, 6, 7, 8, ex demonstratis in tractatu de ordinibus numericis.

Sed productus numerorum 6, 7, 8, non est major *ex ostensis*, producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per datum 58, igitur productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per, 56, non est major quam idem productus numerorum, 1, 2, 3, multiplicatus per datum 58. Igitur 56, non est major quam 58.

Iam sit 126, numerus ordinis *sexti* cuius radix est 5. Igitur ipse 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, æquatur producto numerorum, 6, 7, 8, 9, ex tractatu de ord. numer. Sed productus ille numerorum 6, 7, 8, 9, est major quam numerus datus 58 multiplicatus per productum numerorum, 1, 2, 3, 4, *ex ostensis*. Igitur, numerus, 126, multiplicatus per productum numerorum, 1, 2, 3, 4, est major quam numerus datus 58 multiplicatus per eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4. Igitur numerus, 126, est major quam numerus datus, 58.

Ergo numerus 56 *sexti* ordinis cuius radix est, 4, non est major quam numerus datus, numerus verò, 126, eiusdem ordinis cuius radix 5 est proximè major, major est quam datus numerus.

Ergo ipse numerus, 56, maximus est eius ordinis qui in dato contineatur, & eius radix 4 inuenta est. Q. E. F. E. D.

DE NVMERICORVM ORDINVM RESOLVTIONE.

Problema 3.

DAto quolibet numero, & eius radice, inuenire ordinis exponentem.

Non differt hoc problema à præcedente, radix enim, & exponens ordinis, reciproce conuertuntur, ita vt dato numero v. g. 58, & eius radice, 4, reperietur exponens sui ordinis 6, eâdem methodo, ac si dato numero ipso, 58, & exponente ordinis, 4, radix, 6, esset inuenienda, *quartus* enim numerus *sexti* ordinis idem est ac *sextus quarti*, vt jam demonstratum est.

DE NVMERICORVM ORDINVM. SVMMA.

Problema 4.

PRopositi cujuslibet ordinis numerici, tot quot imperabitur, priorum numerorum summam inuenire.

Propositum sit inuenire summam quinque, *v.g. priorum numerorum ordinis verbi gratia* sexti.

Inueniatur ex præcedente numerus quintus (*quia* quinque *priorum numerorum summa requiritur*) *ordinis* septimi, *nempe eius qui propositum* sextum *proximè sequitur; ipse satisfaciet problemati.*

Numericorum enim ordinum generatio talis est, vt numerus cuiusuis ordinis, æquetur summæ eorum omnium ordinis præcedentis quorum radices non sunt suâ majores; ita vt quintus septimi ordinis, æquetur, ex naturâ & generatione ordinum, quinque prioribus numeris sexti ordinis, quod difficultate caret.

Conclusio.

Methodus quâ ordinum resolutionem expedio est generalissima, verum ipsam diù quæsiui, quæ primò sese obtulit ea est.

Si dati numeri quærebatur radix tertij ordinis, ita procedebam. *Sumatur duplum numeri propositi, istius dupli radix quadrata inueniatur, hæc quæsita est aut saltem ea quæ vnitate minor erit.*

Si dati numeri quæritur radix quarti ordinis, *Multiplicetur numerus datus per*, 6, *nempe per productum numerorum*, 1, 2, 3; *Producti inueniatur radix cubica, ipsa, aut ea quæ vnitate minor est, satisfaciet.*

Si dati numeri quæritur radix quinti ordinis, *Multiplicetur datus numerus per*, 24, *nempe per productum numerorum*, 1, 2, 3, 4, *productique inueniatur radix* 4 *gradus*, *ipsa vnitate minuta, satisfaciet problemati.*

Et ita reliquorum ordinum radices quærebam, constructione non generali, sed cuique propriâ ordini; nec tamen ideo mihi omninò displicebat, illa enim quâ resoluuntur potestates non generalior est, aliter enim extrahitur radix quadrata, aliter cubica, &c. quàmuis ab eodem principio viæ illæ differentes procedant. Vt ergo nondum generalis potestatum resolutio data erat, sic & vix generalem ordinum resolutionem assequi sperabam; conatus tamen expectationem superantes eam quam tradidi præbuerunt generalissimam, & quidem amicis meis, vniuersalium solutionum amatoribus doctissimis, gratissimam; A quibus excitatus & generalem potestatum purarum resolutionem tentare, ad instar generalis ordinum resolutionis, obtemperans quæsiui, & satis fœliciter mihi contigit reperisse, vt infrà videbitur.

DE NVMERORVM CONTINVORVM PRODVCTIS, SEV DE NVMERIS QVI PRODVCVNTVR ex multiplicatione numerorum ſerie naturali procedentium.

NVmeri qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum à nemine, quod ſciam, examinati ſunt. Ideo nomen eis impono nempe, *producti continuorum.*

Sunt autem qui ex duorum multiplicatione formantur, vt iſte, 20, qui ex, 4 in 5 oritur, & poſſent dici *ſecundæ ſpeciei.*

Sunt qui ex trium multiplicatione formantur, vt iſte 120, qui ex, 4 in 5 in 6, oritur & dici poſſent *tertiæ ſpeciei.*

Sic *quartæ ſpeciei* dici poſſent qui ex quatuor numerorum continuorum multiplicatione formantur, & ſic in infinitum, ita vt, ex multitudine *multiplicatorum*, ſpecies nominationem exponentis ſortiretur; & ſic nullus eſſet productus primæ ſpeciei, nullus eſt enim productus ex vno tantum numero.

Primum huius tractatuli theorema, illud eſt quod obiter in præcedente tractatu annotauimus, quod quærendo, reliqua inuenimus, imò & generalem poteſtatum reſolutionem; adeò ſtrictâ connexione ſibi mutuo cohærent veritates.

Prop. I.

Si ſint duo numeri quilibet; Productus omnium numerorum primum præcedentium, eſt ad productum totidem numerorum continuorum à ſecundo incipientium; vt productus omnium numerorum ſecundum præcedentium, ad productum totidem numerorum continuorum à primo incipientium.

Sint duo numeri quilibet 5, 8. Dico productum numerorum, 1, 2, 3, 4, qui præcedunt, 5, nempe 24; esse ad productum totidem continuorum numerorum, 8, 9, 10, 11, nempe 7920: vt productum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, qui præcedunt 8, nempe 5640; ad productum totidem continuorum numerorum, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, nempe 1663200.

Etenim productus numerorum, 5, 6, 7, ductus in productum istorum, 1, 2, 3, 4, efficit productum horum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Et idem productus numerorum, 5, 6, 7, ductus in productum numerorum, 8, 9, 10, 11, efficit productum horum, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ergo, vt productus numerorum, 1, 2, 3, 4; Ad productum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; Ita productus numerorum, 8, 9, 10, 11; ad productum numerorum, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Q. E. D.

Prop. 2.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis, est multiplex producti à totidem numeris continuis quorum primus est vnitas; & quotiens est numerus figuratus.

Sit productus quilibet, à tribus v.g. numeris continuis, 5, 6, 7, nempe 210, & productus totidem numerorum ab vnitate incipientium, 1, 2, 3, nempe, 6; Dico ipsum 210 esse multiplicem ipsius, 6. Et quotientem esse numerum figuratum.

Etenim ipse, 6, ductus in quintum numerum ordinis quarti, nempe, 35, æquatur ipsi producto ex, 5, 6, 7, ex demonstratis in tractatu de ordinibus numericis.

Prop. 3.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex numeri cuiusdam figurati, nempe eius cuius radix est minimus ex his numeris, exponens verò ordinis est vnitate major quam multitudo horum numerorum.

Hoc patet ex præcedente. Et vnica vtrique conuenit demonstratio.

Monitum.

Ambo diuisores in his duabus propositionibus ostensi, tales sunt, vt alter alterius sit quotiens. Ita vt quilibet productus à quotlibet numeris continuis, diuisus per productum totidem numerorum ab vnitate incipientium, vt secunda propositio docet fieri posse, quotiens sit numerus figuratus in tertiâ propositione enuntiatus.

Prop. 4.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis ab vnitate incipientibus, est multiplex producti à quotlibet numeris continuis etiam ab vnitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Sint quotlibet numeri continui ab vnitate, 1, 2, 3, 4, 5, quorum productus, 120, quotlibet autem ex ipsis ab vnitate incipientes, 1, 2, 3, quorum productus, 6, Dico, 120 esse multiplicem, 6.

Etenim productus numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, fit ex producto numerorum, 1, 2, 3, multiplicato per productum numerorum, 4, 5.

Prop. 5.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex producti à quotlibet numeris continuis ab vnitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Etenim productus continuorum quorumlibet est multiplex totidem continuorum ab vnitate incipientium *ex secunda,* sed *ex quarta* productus continuorum ab vnitate est multiplex producti continuorum ab vnitate quorum multitudo minor est. Ergo, &c.

Prop. 6.

Productus quotlibet continuorum, est ad productum totidem proximè maiorum, vt minimus multiplicatorum ad maximum.

Sint quotlibet numeri, 4, 5, 6, 7, quorum productus 840; & totidem proximè maiores 5, 6, 7, 8, quorum productus 1680. Dico, 840, esse ad 1680. vt 4, ad 8.

Etenim productus numerorum, 4, 5, 6, 7, est factus ex producto continuorum, 5, 6, 7, multiplicato per, 4, productus verò continuorum, 5, 6, 7, 8, factus est ex eodem producto continuorum, 5, 6, 7, multiplicato per, 8. Ergo, &c.

Prop. 7.

Minimus productus continuorum cuiuslibet speciei, ille est cuius multiplicatores ab vnitate incipiunt.

V.g. minimus productus ex quatuor continuis factus, ille est qui producitur ex quatuor his continuis, 1, 2, 3, 4, qui quidem multiplicatores 1, 2, 3, 4, ab vnitate incipiunt. Hoc ex se & ex præcedentibus patet.

PRODVCTA CONTINVORVM RESOLVERE.

SEV,

Resolutio numerorum qui ex numeris progressione naturali procedentibus producuntur.

Problema.

DAto quocunque numero, inuenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, sit maximus eius speciei qui in dato numero contineatur.

Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab vnitate continuorum.

Datus sit numerus verbi gratia 4335. *Oporteatque reperire verbi gratia* quatuor *numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus sit maximus qui in dato* 4335 *contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione* quatuor *numerorum continuorum.*

Sumantur ab vnitate tot numeri continui quot sunt numeri inueniendi, nempe quatuor *in hoc exemplo,* 1, 2, 3, 4, *quorum per productum,* 24, *diuidatur numerus datus sitque quotiens,* 180. *Ipsius quotientis inueniatur radix ordinis numerici non quidem* quarti *sed sequentis nempe* quinti *sitque ea,* 6. *Ipse,* 6, *est primus numerus, secundus* 7, *tertius* 8, *quartus* 9.

Dico itaque productum *quatuor* numerorum, 6, 7, 8, 9, esse maximum numerum qui in dato contineatur, id est. Dico productum *quatuor* numerorum, 6, 7, 8, 9, nempe 3024, non esse majorem quam numerum datum, 4335; productum verò *quatuor* proximè majorum numerorum, 7, 8, 9, 10, nempe, 5040, esse majorem numero dato, 4335.

Etenim, ex demonstratis in tractatu de ordinibus numericis, constat productum numerorum, 1, 2, 3, 4, seu 24, ductum in numerum quinti ordinis cuius radix est, 6, nempe, 126, efficere numerum æqualem producto numerorum, 6, 7, 8, 9, nempe, 3024. Similiter, & eundem productum numerorum, 1, 2, 3, 4, nempe, 24, ductum in numerum eiusdem

dem ordinis quinti cuius radix eſt, 7, efficere numerum æqualem producto numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040.

Iam verò numerus quinti ordinis cuius radix eſt, 6, nempe 126, cum ſit maximus, eius ordinis qui in 180 contineatur, ex conſtr. patet ipſum 126 non eſſe majorem quam 180, numerum verò, quinti ordinis cuius radix eſt, 7, nempe 210, eſſe majorem quam ipſum, 180.

Cum verò, numerus 4335, diuiſus per 24, dederit 180 quotientem patet, 180 ductum in 24, ſeu 4320, non eſſe majorem quam 4335, ſed aut æqualem eſſe, aut differre numero minore quam, 24.

Itaque cum ſit 210 major quam 180 ex conſtr. patet, 210 in 24, ſeu 5040 majorem eſſe quam 180 in 24 ſeu 4320, & exceſſum eſſe ad minimùm, 24, numerus verò datus 4335, aut non excedit ipſum 4320, aut excedit numero minore quam 24. Ergo, numerus 5040, major eſt quam datus 4335, ideſt productus numerorum, 7, 8, 9, 10, major eſt dato numero.

Iam numerus 126, non eſt major quam 180, ex conſtr. Igitur, 126 in 24, non eſt major quam 180 in 24, ſed 180 in 24, non eſt major dato numero ex oſtenſis. Ergo, 126 in 24, ſeu productus numerorum, 6, 7, 8, 9, non eſt major numero dato, productus autem numerorum, 7, 8, 9, 10, ipſo major eſt. Ergo, &c. Q. E. F. E.

Sic ergo exprimi poteſt & enuntiatio, & generalis conſtructio.

Inuenire tot quot imperabitur numeros progreſſione naturali continuos, ex quorum multiplicatione ortus numerus, ſit maximus eius ſpeciei qui in dato numero contineatur.

Diuidatur numerus datus, per productum totidem numerorum ab vnitate ſerie naturali procedentium quot ſunt numeri inueniendi, inuentoque quotiente, aſſumatur ipſius radix ordinis numerici cujus exponens eſt vnitate major quam multitudo numerorum inueniendorum. Ipſa radix eſt primus numerus, Reliqui per incrementum vnitatis in promptu habentur.

Monitum.

Hæc omnia ex naturâ rei demonſtrari poterant, abſque trianguli Arithmetici aut ordinum numericorum auxilio, non tamen fugienda illa connexio mihi viſa eſt, præſertim cùm ea ſit quæ lumen primum dedit. Et, quod amplius eſt, alia demonſtratio laborioſior eſſet, & prolixior.

NVMERICARVM POTESTATVM GENERALIS RESOLVTIO.

Generalem Numericarum Poteſtatum Reſolutionem inquirenti, hæc mihi venit in mentem obſeruatio; Nihil aliud eſſe quærere *radicem v. g. quadratam dati numeri*, quam quærere *duos numeros æquales quorum productus æquetur numero dato*. Sic & quærere *radicem cubicam* nihil aliud eſſe quam quærere *tres numeros æquales quorum productus ſit datus*, & ſic de cæteris.

Itaque, poteſtatis cuiuſlibet reſolutio, eſt indagatio totidem numerorum æqualium, quot exponens poteſtatis continet vnitates, quorum productus æquetur dato numero; Poteſtates enim ipſæ nihil aliud ſunt quam æqualium numerorum producti.

Sicut enim in præcedenti tractatu, egimus de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum naturali progreſſione procedentium, ſic & in hoc de poteſtatibus tractatu, agitur de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum æqualium.

Viſum eſt itaque quamproximos eſſe ambos hos tractatus, & nihil eſſe vicinius, producto ex æqualibus, quam productum ex continuis ſolius vnitatis incremento differentibus.

Quapropter poteſtatum reſolutionem generalem, ſeu *productorum ex æqualibus* reſolutionem, non mediocriter prouectam eſſe cenſui, cum eam *productorum ex continuis* generalis reſolutio præceſſerit.

Dato enim numero, cuius radix cujuſuis gradus quæritur verbi gratia *quarti*, quæruntur *quatuor* numeri æquales quorum productus æquetur dato; Si ergo inueniantur ex præcedente tractatu, *quatuor* continui quorum productus æquetur dato, quis non videt, iuuentam eſſe radicem quæſitam, cum ea ſit vnus ex his *quatuor* continuis; Minimus enim ex his *quatuor*, *quater* ſumptus & toties multiplicatus manifeſtè minor eſt producto continuorum, maximus verò ex his *quatuor*, *quater* ſumptus ac toties multiplicatus, manifeſtè major eſt producto continuorum; Radix ergo quæſita vnus ex illis eſt.

Verùm latet adhuc ipſa in multitudine; Reliquum eſt igitur vt eligatur, & diſcernatur quis ex continuis ſatisfaciat quæſtioni.

Huic perquiſitioni nòndum forte ſatis incubui, crudam tamen meditationem proferam, alias, ſi digna videatur, diligentius elaborandam.

Postulatum.

Hoc autem prænotum esse postulo; Quæ sit radix *quadrata* numeri, 2, nempe, 1. *Etenim*, 1, *est radix maximi quadrati in* 2. *contenti.* Sic & quæ sit radix *cubica* numeri, 6, *scilicet qui ex multiplicatione trium numerorum*, 1, 2, 3, *oritur*, nempe, 1. Sic & quæ sit radix *quarti* gradus numeri, 24, *scilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum*, 1, 2, 3, 4, *oritur* nempe, 2, & sic de cæteris gradibus. In vnoquoque enim peto nosci radicem istius gradus, numeri qui producitur ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab vnitate quot exponens gradus propositi continet vnitates. Sic ergo in inuestigatione radicis v. g. *decimi* gradus, postulo notam esse radicem istius *decimi* gradus, numeri 3628800, qui producitur ex multiplicatione *decem* priorum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nempe 5. Et hoc vno verbo dici potest. In vnoquoque gradu, postulo notam esse radicem istius gradus minimi producti totidem continuorum quot exponens gradus continet vnitates; Minimus enim productus continuorum quotlibet, ille est cuius multiplicatores ab vnitate sumunt exordium.

Nec sanè molesta hæc petitio est, in vnoquoque enim gradu *vnius* tantum numeri radicem suppono, in vulgari autem methodo, multo grauius in vnoquoque gradu, *nouem* priorum characterum, potestates exiguntur.

Notum sit ergo.

Producti numerorum,	1, 2,	nempe 2	rad. quadr. esse,	1
Producti num.	1, 2, 3,	nempe, 6	rad. cub. esse	1
Producti num.	1, 2, 3, 4,	nemp. 24	rad. 4. grad. esse	2
Prod. num.	1, 2, 3, 4, 5,	nempe 120	rad. 5. gr.	2
Prod. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6,	nem. 720	rad. 6. gr. esse	2
Pr. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,	nem. 5040	rad. 7. gr. esse	3

&c.

Problema.

Dato quolibet numero inuenire radicem propositæ potestatis maximæ quæ in dato contineatur.

Sit datus numerus v. g. 4335, & inuenienda sit radix gradus v. g. *quarti* maximi numeri *quarti* gradus seu *quadrato quadrati* qui in dato numero contineatur.

Inueniantur, ex præcedente tractatu, *quatuor* numeri continui, quia *quartus* gradus proponitur, quorum productus sit maximus eius speciei qui in 4335 contineatur, sintque ipsi, 6, 7, 8, 9.

Radix quæsita est vnus ex his numeris. Vt verò discernatur, sic procedendum est.

Sumatur ex postulato radix *quarti* gradus numeri qui producitur ex multiplicatione *quatuor* priorum numerorum, 1, 2, 3, 4, nempe radix *quadrato-quadrata* numeri, 24, quæ est, 2; Ipse, 2, cum minimo continuorum inuentorum 6 vnitate minuto nempe, 5, efficiet 7.

Hic 7 est minimus qui radix quæsita esse possit, omnes enim inferiores sunt necessario minores radice quæsitâ.

Iam, triangulus *numeri*, 4, qui exponens est propositi gradus *quarti* nempe 10, diuidatur per ipsum exponentem 4, sitque, quotiens, 2, *superfluum diuisionis non curo* ipse quotiens, 2, cum minimo continuorum 6, iunctus, efficit, 8.

Ipse 8, est maximus qui radix esse possit omnes enim superiores sunt necessario majores radice quæsitâ.

Deniq; constituantur *in quarto* gradu ipsi extremi num. 7, 8, nempe, 2401, 4096, necnon & omnes qui inter ipsos interjecti sunt, *quod ad generalem methodum dictum sit, hîc enim nulli inter* 7 *&* 8 *interjacent sed in remotissimis potestatibus quidam, quamuis perpauci, contingent.*

Harum potestatum, illa quæ æqualis erit dato numero, *si ita eueniat*, aut saltem quæ proximè minor erit dato numero nempe, 4096 satisfaciet problemati. Radix enim 8 vnde orta est, ea est quæ quæritur.

Sic ergo institui potest & enuntiatio & generalis constructio.

Inuenire numerum qui in gradu proposito constitutus maximus sit eius gradus qui in dato numero contineatur.

Inueniantur ex tract. præced. *tot numeri continui, quot sunt vnitates in exponente gradus propositi, quorum productus sit maximus eius speciei qui in dato numero contineatur. Et assumpto producto totidem continuorum ab vnitate, inueniatur eius radix gradus propositi*, ex postulato *ipsa radix jungatur cum minimo continuorum inuentorum vnitate minuto*, hic erit minimus extremus.

Iam triangulus exponentis ordinis per ipsum exponentem diuisus quemlibet præbeat quotientem, qui cum minimo continuorum inuentorum iungatur, hic erit maximus extremus.

Ambo hi extremi ac numeri inter eos interpositi in gradu proposito constituantur.

Harum potestatum, ea quæ dato numero erit aut æqua-

lis aut proximè minor ſatisfacit problemati, Radix enim vnde orta eſt, radix quæſita eſt.

Horum demonſtrationem, paratam quidem, ſed prolixam etſi facilem, ac magis tædioſam quam vtilem ſupprimimus, ad illa, quæ plus afferunt fructus quam laboris, vergentes.

COMBINATIONES.

DEFINITIONES.

Combinationis nomen diuersè à diuersis vsurpatur, dicam itaque quo sensu intelligam.

Si exponatur multitudo quæuis rerum quarumlibet, ex quibus liceat aliquam multitudinem assumere v.g. si ex *quatuor* rebus per litteras, A, B, C, D, expressis, liceat *duas* quasuis ad libitum assumere. Singuli modi quibus possunt eligi *duæ* differentes ex his *quatuor* oblatis, vocantur hîc *combinationes*.

Experimento igitur patebit, *duas*, posse assumi inter *quatuor*, *sex* modis, potest enim assumi A & B, vel A & C, vel A & D, vel B & C, vel B & D, vel C & D.

Non constituo, A & A, inter modos eligendi duas non enim essent differentes, nec constituo A & B, & deinde B & A, tanquam differentes modos, ordine enim solummodo differunt, *ad ordinem autem non attendo*, ita vt vno verbo dixisse poteram, combinationes hîc considerari quæ noc mutato ordine procedunt.

Similiter experimento patebit, *tria* inter *quatuor*, *quatuor* modis assumi posse, nempe, A B C, A B D, A C D, B C D.

Sic & *quatuor* in *quatuor*, *vnico* modo assumi posse, nẽpe, A B C D.

His igitur verbis vtar.

1 In 4 combinatur 4 modis, seu combinationibus.
2 In 4 combinatur 6 modis, seu combinationibus.
3 In 4 combinatur 4 modis, seu comb.
4 In 4 combinatur 1 modo, seu comb.

Summa autem omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, est 15, summa enim combinationum 1 in 4, & 2 in 4, & 3 in 4, & 4 in 4, est, 15.

Lemma 1.

Numerus quilibet non combinatur in minore.

V. g. 4 non combinatur in 2.

Lemma 2.

1 in 1 combinatur 1 combinatione
2 in 2 combinatur 1 combinatione

3 in 3 combinatur 1 combinatione.

Et ſic generaliter omnis numerus ſemel tantum in æquali combinatur.

Lemma 3.

1 in 1 combinatur, 1 combinatione
1 in 2 combinatur 2 combinationibus
1 in 3 combinatur 3 combinationibus.

Et generaliter vnitas in quouis numero toties combinatur quoties ipſe continet vnitatem.

Lemma 4.

Si ſint quatuor numeri, primus ad libitum, ſecundus vnitate major quam primus, tertius ad libitum modo non ſit minor ſecundo, quartus vnitate major quam tertius; multitudo combinationum primi in tertio, plus multitudine combinationum ſecundi in tertio, æquatur multitudini combinationum ſecundi in quarto.

Sint quatuor numeri vt dictum eſt.

Primus ad libitum verbi gratia	1
Secundus vnitate major nempe	2
Tertius ad libitum modo non ſit minor quam ſecundus v. g.	3
Quartus vnitate major quam tertius nempe	4

Dico multitudinem combinationum, 1, in 3, plus multitudine combinationum, 2, in 3, æquari multitudini combinationum, 2, in 4. *Quod vt paradigmate fiat euidentius.*

Aſſumantur *tres* characteres nempe, B, C, D, jam verò aſſumantur ijdem *tres* characteres & *vnus* præterea, A, B, C, D; Deinde aſſumantur combinationes *vnius* litteræ *in tribus*, B, C, D, nempe, B, C, D; Aſſumantur quoque omnes combinationes *duarum* litterarum in *tribus* B, C, D, nempe, BC, BD, CD; Denique aſſumantur omnes combinationes *duarum* litterarum in *quatuor*, A, B, C, D, nempe, AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Dico itaque, tot eſſe combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, quot ſunt *duarum* in *tribus* B, C, D, & inſuper quot *vnius* in *tribus* B, C, D.

Hoc manifeſtum eſt ex generatione combinationum, combinationes enim *duarum* in *quatuor* formantur partim, ex combinationibus *duarum* in *tribus*, partim, ex combinationibus *vnius* in *tribus*; quod ita euidens fiet.

Ex combinationibus *duarum* in *quatuor*, nempe AB, AC, AD, BC, BD, CD, quædam ſunt in quibus ipſa littera, A, vſurpatur, vt iſtæ AB, AC, AD; quædam quæ ipsâ A carent vt iſtæ, BC, BD, CD.

Porro, combinationes illæ, BC, BD, CD, *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, quæ ipſo A carent, conſtant ex reſiduis *tribus*, B, C, D, ſunt ergo combinationes *duarum* in *tribus* B, C, D, igitur combinationes *duarum* in *tribus* B, C, D, ſunt quoque combinationes *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, nempe illæ quæ carent ipſo A.

Illæ verò combinationes AB, AC, AD, *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, in quibus A vſurpatur, ſi ipſo A ſpolientur, relinquent reſiduas litteras, B, C, D, quæ ſunt ex *tribus* litteris B, C, D, ſuntque combinationes *vnius* litteræ in *tribus*, B, C, D, igitur combinationes *vnius* litteræ in *tribus* B, C, D, nempe B, C, D, aſcito A, efficiunt AB, AC, AD, quæ conſtituunt combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, in quibus, A, vſurpatur.

Igitur combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, formantur partim ex combinationibus *vnius* in *tribus*, B, C, D, partim ex combinationibus *duarum* in *tribus*, B, C, D; Quare multitudo primarum æquatur multitudini reliquarum, Q. E. D.

Eodem prorſus modo in reliquis oſtendetur exemplis verbi gratia

tot eſſe combin. numeri	29	in	40
quot ſunt comb. numeri	29	in	39
& inſuper quot ſunt comb. numeri	28	in	39.

Quatuor enim numeri, 28, 29, 39, 40, conditionem requiſitam habent.

Sic tot ſunt comb. numeri	16	in	56
quot ſunt comb. numeri	16	in	55
ac inſuper quot ſunt comb. numeri	15	in	55.

&c.

Lemma 5.

In omni triangulo Arith. ſumma cellularum ſeriei cujuſlibet, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli.

Sit triangulus quilibet v. g. *quartus*, G D λ. Dico ſummam cellularum ſeriei cujuſuis v. g. *ſecundæ* φ † ψ † θ æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſecundæ ſeriei* in numero 4 *exponente quarti trianguli*.

Sic Dico ſummam cellularum ſeriei v. g. *quintæ* trianguli v. g. *octaui* æquari multitudini combinationum numeri, 5 in numero 8, &c.

Quamuis infiniti ſint huius propoſitionis caſus, ſunt enim infiniti trianguli, breuiter tamen demonſtrabo, poſitis duobus aſſumptis.

Primo

Primo, quod ex se patet, *in primo triangulo eam proportionem contingere*, Summa enim cellularum vnicæ suæ seriei nempe numerus primæ cellulæ G ideſt vnitas, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli, hi enim exponentes ſunt vnitates. Vnitas verò in vnitate vnico modo *ex lemm. 2. huius* combinatur.

Secundo, *Si ea proportio in aliquo triangulo contingat; Ideſt ſi ſumma cellularum vniuſcujuſcumque ſeriei trianguli cujuſdam, æquetur multitudini combinationum exponentis ſeriei in exponente trianguli Dico & eandem proportionem in triangulo proximè ſequenti contingere.*

His aſſumptis, facilè oſtendetur in ſingulis triangulis eam proportionem contingere, contingit enim in primo, *ex primò aſſumpto* immò & manifeſta quoque ipſa eſt in ſecundo triangulo, ergò *ex ſecundo aſſumpto* & in ſequenti triangulo contingit, quare & in ſequenti & in infinitum.

Totum ergo negotium in ſecundi aſſumpti demonſtratione conſiſtit, quod ita expedietur.

Sit triangulus quilibet v. g. *Tertius* in quo ſupponitur hæc proportio, id eſt, ſummam cellularum ſeriei *primæ* G † σ † π æquari multitudini combinationum numeri, 1, *exponentis ſeriei* in numero, 3, *exponente trianguli.* Summam verò cellularum *ſecundæ ſeriei* φ † ⅄ æquari multitudini combinationum numeri 2 *exponentis ſeriei* in numero 3 *exponente trianguli*, ſummam verò cellularum *tertiæ ſeriei*, nempe cellulam, A, æquari combinationibus numeri 3 *exponentis ſeriei* in 3 *exponente trianguli* Dico & eandem proportionem contingere & in ſequenti triangulo *quarto*, id eſt, ſummam cellularum v. g. *ſecundæ* ſeriei φ † ⅄ † θ, æquari multitudini combinationum numeri 2 *exponentis ſeriei* in numero 4 *exponente trianguli.*

Etenim φ † ⅄ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 3 *ex hypoth.* cellula verò θ æquatur *ex generatione trianguli arith.* cellulis G † σ † π hæ verò cellulæ æquantur *ex hyp.* multitudini combinationum numeri 1 in 3. Ergo cellulæ φ † ⅄ † θ æquantur multitudini combinationum numeri 2 in 3 plus multitudine combinationum numeri 1 in 3, hæ autem multitudines æquantur *ex quarto lemmate huius* multitudini combinationum numeri 2 in 4. Ergo ſumma cellularum φ † ⅄ † θ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 4. Q. E. D.

Idem Lemma 5. Problematicè enuntiatum.

Datis duobus numeris inæqualibus inuenire *in triangul. arith.* quot modis minor in majore combinetur.

Propoſiti ſint duo numeri v. g. 4 & 6, oportet reperire in triangulo arith. quot modis 4 combinetur in 6.

Prima methodus.

Summa cellularum *quartæ* ſeriei, *ſexti* trianguli, ſatisfacit, *ex præced. nempe cellulæ* D † E † F.

Hoc eſt numeri, 1 † 4 † 10, *ſeu* 15. *Ergo* 4 *in* 6, *combinatur* 15 *modis.*

Secunda methodus.

Cellula *quinta*, baſis *ſeptimæ* K, ſatisfacit, *illi numeri,* 5, 7, *ſunt proximè majores his*, 4, 6.

Etenim illa cellula nempe K, ſeu 15 æquatur ſummæ cellularum *quartæ* ſeriei *ſexti* trianguli D † E † F, ex generatione.

Monitum.

In baſi *ſeptimâ* ſunt ſeptem cellulæ nempe, V, Q, K, ρ, ξ, N, ζ, ex quibus *quinta* aſſumenda eſt; Poteſt autem ipſa duplici modo aſſumi, ſunt enim duæ baſis extremitates V, ζ, ſi ergo ab extremo, V inchoaueris, erit, V prima, Q ſecunda, K tertia, ρ quarta, ξ quinta quæſita. Si verò à ζ incipias, erit ζ prima, N ſecunda, ξ tertia, ρ quarta, K quinta quæſita, ſunt igitur duæ quæ poſſunt dici, *quintæ;* ſed quoniam ipſæ ſunt æquè ab extremis remotæ, ideoque reciprocæ, ſunt ipſæ eædem, quare indifferenter aſſumi alterutra poteſt, & ab alterutrâ baſis extremitate inchoari.

Monitum.

Iam ſatis patet, quam bene conueniant combinationes & triangulus arithmeticus, & ideò, proportiones inter ſeries, aut inter cellulas trianguli obſeruatas, ad combinationum rationes protendi, vt in ſequentibus videre eſt.

Prop. 1.

Duo quilibet numeri, æquè combinantur in eo quod amborum aggregatum eſt.

Sint duo numeri quilibet, 2, 4, quorum aggregatum 6 Dico, numerum 2 toties combinari in 6, quoties ipſe 4 in eodem 6 combinatur, *nempe ſingulos modis* 15.

Hoc nihil aliud eſt quam conſect. 4. *triang. arith. & poteſt hoc vno verbo demonſtrari*, cellulæ enim reciprocæ ſunt eædem. *Si verò ampliori demonſtratione egere videatur, hæc ſatisfaciet.*

Multitudo combinationum numeri 2 in 6 æquatur *ex* 5 *lem.* ſeriei *ſecundæ*, trianguli *ſexti* nempe cellulis φ † ψ † θ † R † S, ſeu cellulæ

ξ; Sic multitudo quoque combinationum numeri 4 in 6 æquatur *ex eodem* ſeriei *quartæ* trianguli *ſexti*, Nempe cellulis D † E † F, ſeu cellulæ K; ipſa verò K, eſt reciproca ipſius ξ, ideoque ipſi æqualis, quare & multitudo combinationum numeri 2 in 6, æquatur multitudini combinationum numeri 4 in 6. Q. E. D.

Coroll.

Ergo omnis numerus toties combinatur in proximè majori, quot ſunt vnitates in ipſo majori.

Verbi gratia numerus 6, in 7 combinatur *ſepties*, & 4 in 5 *quinquies*, &c. Ambo enim numeri, 1, 6, æquè combinantur in aggregato eorum 7, *ex propr. hac*, 1. Sed, 1 in 7 combinatur ſepties, *ex lemm.* 3. Igitur 6 in 7 combinatur quoque ſepties.

Prop. 2.

Si duo numeri combinentur in numero quod amborum aggregatum eſt vnitate minuto; Multitudines combinationum erunt inter ſe, vt ipſi numeri reciprocè.

Hoc nihil aliud eſt quam conſect. 17. *triang. arith.*

Sint duo quilibet numeri, 3, 5, quorum ſumma 8, vnitate minuta eſt 7. Dico, multitudinem combinationum numeri 3 in 7, eſſe ad multitudinem combinationum numeri 5 in 7, vt, 5 ad 3.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 7, æquatur, *ex* 5. *lem. tertiæ* ſeriei, *ſeptimi* trianguli arith. nempe A † B † C † ω † ξ, ſeu 35. Multitudo autem combinationum numeri 5 in 7, æquatur, *ex eodem*, *quintæ* ſeriei, eiuſdem *ſeptimi* trianguli, nempe H † M † K, ſeu 21 in triangulo autem *ſeptimo*, ſeries *quinta* & *tertia* ſunt inter ſe vt 3 ad 5, *ex conſect.* 17. *triang. arith.* aggregatum enim exponentium ſerierum 5, 3 nempe 8, æquatur exponenti trianguli 7 vnitate aucto.

Prop. 3.

Si numerus combinetur, primò in numero qui ſui *duplus* eſt, deinde in ipſomet numero *duplo* vnitate minuto, prima combinationum multitudo, ſecundæ dupla erit.

Hoc nihil aliud eſt quam conſect. 10. *triang. arith.*

Sit numerus quilibet 3, cuius duplus, 6, qui vnitate minutus eſt 5. Dico multitudinem combinationum numeri 3 in 6, duplam eſſe multitudinis combinationum numeri 3 in 5.

Poſſem vno verbo dicere omnis enim cellula diuidentis dupla eſt præcedentis corradicalis *ſic autem demonſtro*, Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur *ex 5. lem.* cellulæ 4, basis 7; nempe ρ, *seu* 20, quæ quidem ρ, medium basis occupat locum, *quod inde procedit quod* 3 *sit dimidium* 6, *vnde fit vt* 4 *proximè major quam* 3, *medium occupet locum in numero* 7 *proximè majori quam* 6. Igitur ipsa cellula *quarta*, ρ, est in diuidente, quare dupla est cellulæ, F, seu ω *ex* 10. *consect. triang. arith.* quæ quidem, ω, est quoque *quarta* cellula basis *sextæ*, ideóque, *ex lemm.* 5, ipsa ω seu F æquatur multitudini combinationum numeri 3 in 5, ergo multitudo comb. 3 in 6 dupla est multitudinis comb. 3 in 5. Q. E. D.

Prop. 4.

Si sint duo numeri proximi, & alius quilibet in vtroque combinetur, multitudo combinationum quæ fiunt in majore, erit ad alteram multitudinem, vt major numerus, ad ipsummet majorem dempto eo qui combinatus est.

Sint duo numeri vnitate differentes, 5, 6, & alius quilibet 2 combinetur in 5, & deinde in 6; Dico multitudinem combinationum ipsius 2 in 6, esse ad multitudinem combinationum ipsius 2 in 5, vt 6, ad 6−2.

Hoc ex 13 *consect. triang. arith. est manifestum & sic ostendetur.*

Multitudo, enim, combinationum ipsius 2 in 6, æquatur summæ cellularum seriei 2, trianguli 6, nempe φ † ψ † θ † R † S, ex lemm. 5. hoc est cellulæ ξ, seu 15. Sed, ex eodem, multitudo combinationum eiusdem 2 in 5, æquatur summæ cellularum seriei 2, trianguli 5, nempe φ † ψ † θ † R, seu cellulæ ω, seu 10; est autem cellula ξ ad ω, vt 6 ad 4, hoc est vt 6 ad 6−2, ex 13 consect. triang. arith.

Prop. 5.

Si duo numeri proximi, in alio quolibet combinentur, erit multitudo combinationum minoris, ad alteram, vt major numerus combinatus, ad numerum in quo ambo combinati sunt dempto minore numero combinato.

Sint duo quilibet numeri proximi, 3, 4, & alius quilibet 6; Dico multitudinem combinationum *minoris* 3 in 6, esse ad multitudinem combinationum *majoris* 4 in 6, vt 4, ad 6—3.

Hæc cum 11. *consect. tr. arith. conuenit & sic ostendetur.*

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, ex lemm. 5. Summæ cellularum seriei 3, trianguli 6, nempe, A † B † C † ω, seu cellulæ ρ, seu 20. Multitudo vero combinationum numeri 4 in 6, æquatur, ex eodem, summæ cellularum seriei 4, trianguli 6, nempe D † E † F, seu cellulæ K, seu 15. est autem ρ ad K, vt 4 ad 3, seu vt 4 ad 6—3. ex consect. 11. tr. arith.

Prop. 6.

Si sint duo numeri quilibet quorum minor in majore combinetur, sint autem & alij duo his proximè majores quorum minor in majore quoque combinetur, erunt multitudines combinationum inter se, vt hi ambo vltimi numeri.

Sint duo quilibet numeri, 2, 4, alij verò his proximè majores, 3, 5; Dico multitudinem combinationum numeri 2 in 4, esse ad multitudinem combinationum numeri 3 in 5, vt 3, ad 5.

Consect. 12, *triang. arith. hanc continet & sic demonstratur.*

Multitudo enim combinationum ipsius 2 in 4, æquatur, ex lemm. 5, summæ cellularum seriei 2, trianguli 4, nempe φ † ψ † θ, seu cellulæ C, seu 6; Multitudo verò combinationum numeri 3 in 5, æquatur, ex eodem, summæ cellularum seriei 3, trianguli 5, nempe A † B † C, seu cellulæ F, seu 10; Est autem C ad F, vt 3 ad 5, ex 12 consect. triang. arith.

Lemma 6.

Summa omnium cellularum basis triang. cuiuslibet arithmetici vnitate minuta, æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero qui proximè minor est quam exponens basis.

Sit triangulus quilibet arithmeticus v. g. *quintus* G H μ, Dico summam cellularum suæ basis H † E † C † R † μ, minus vnitate, *seu minus vnâ ex extremis* H *vel* μ æquari summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero 4 qui proximè minor est quam exponens basis, 5. Id est. Dico summam cellularum R † C † E † H. *Supprimo enim extremam* μ, id est 4 † 6 † 4 † 1, seu 15; æquari multitudini combinationum numeri 1 in 4, nempe 4; Plus multitudine combinationum numeri 2 in 4, nempe 6; Plus multitudine combinationum numeri 3 in 4, nempe 4; Plus multitudine combinationum numeri 4 in 4, nempe 1. *Quæ quidem sunt omnes combinationes quæ fieri possunt in 4, superiores enim numeri, 5, 6, 7, &c. non combinantur in numero 4; major enim numerus in minore non combinatur.*

Multitudo enim combinationum numeri 1 in 4, æquatur, ex 5. lem. cellulæ 2, basis 5, nempe R, seu 4. Multitudo verò combinationum numeri 2 in 4, æquatur cellulæ 3, basis 5, nempe C, seu 6. Multitudo quoque combinationum numeri 3 in 4, æquatur cellulæ 4, basis 5, nempe E, seu 4. Multitudo denique combinationum numeri 4 in 4, æquatur cellulæ 5, basis 5, nempe H, seu 1. Igitur summa cellularum basis *quintæ* demptâ extremâ seu vnitate, æquatur summæ omnium combinationum quæ possunt fieri in 4.

Prop. 7.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet vnitate aucta, est numerus progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium, quippe ille cuius exponens est numerus proximè major quam datus.

Sit numerus quilibet v. g. 4. Dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4 nempe 15 vnitate auctam nempe 16, esse numerum *quintum* (nempe proximè majorem quam *quartum*) progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium.

Hoc nihil aliud est quam 7 consect. triang. arith. & sic vno verbo demonstrari posset, omnis enim basis est numerus progressionis duplæ, *sic tamen demonstro.*

Summa enim combinationum omnium quæ fieri possunt in 4 vnitate aucta, æquatur, ex lem. 6. summæ cellularum basis *quintæ*, ipsa verò basis est *quintus* numerus progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium, ex 7. consect. triang. arith.

Prop. 8.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet vnitate aucta, dupla est summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero proximè minori vnitate auctæ.

Hoc conuenit cum 6 consect. triang. arith. nempe omnis basis dupla est præcedentis, *sic autem ostendemus.*

Sint duo numeri proximi 4, 5, dico summam combinationum quæ fieri possunt in 5 nempe 31 vnitate auctam nempe 32, esse duplam summæ combinationum quæ fieri possunt in 4 nempe 15 vnitate auctæ nempe 16.

Summa enim combinationum quæ fieri possunt in 5 vnitate aucta, æquatur, ex præced. *sexto* numero progressionis duplæ. Summa verò combinationum quæ fieri possunt in 4 vnitate aucta, æquatur, ex eâdem, *quinto* numero progressionis duplæ. *Sextus* autem numerus progressionis duplæ, duplus est proximè præcedentis nempe *quinti*.

Prop. 9.

Summa omnium combinationum quæ fieri poſſunt in quouis numero vnitate minuta, dupla eſt ſummæ combinationum quæ fieri poſſunt in numero proximè minori.

Hæc cum præcedente omnino conuenit.

Sint duo numeri proximi 4, 5, Dico ſummam omnium combinationum quæ fieri poſſunt in 5, *nempe* 31, vnitate minutam *nempe* 30, eſſe duplam omnium combinationum quæ fieri poſſunt in 4 *nempe* 15.

Etenim *ex præced.* ſumma combinat. quæ fiunt in 5 vnitate aucta, dupla eſt ſummæ combinationum quæ fiunt in 4 vnitate auctæ, ſi ergo ex *minori* ſummâ auferatur vnitas, & ex *duplâ ſummâ* auferantur duæ vnitates, reliquum ſummæ *duplæ* nempe *ſumma combinationum quæ fiunt in 5 vnitate minuta*, remanebit *dupla* reſidui alterius ſummæ nempe *ſummæ combinationum quæ fiunt in* 4.

Prop. 10.

Summa omnium combinationum quæ fieri poſſunt in quolibet numero minuta ipſomet numero, æquatur ſummæ omnium combinationum quæ fieri poſſunt in ſingulis numeris propoſito minoribus.

Hæc cum 8 *conſect. tr. arith. concurrit quæ ſic habet*, baſis quælibet vnitate minuta, æquatur ſummæ omnium præcedentium. *Sic autem oſtendo.*

Sit numerus quilibet 5. Dico ſummam omnium combinationum quæ poſſunt fieri in 5 nempe 31 ipſo 5 minutam nempe 26, æquari ſummæ omnium combinationum quæ poſſunt fieri in 4 nempe 15; Plus ſummâ omnium quæ poſſunt fieri in 3 nempe 7; Plus ſummâ omnium quæ poſſunt fieri in 2 nempe 3; Plus eâ quæ poteſt fieri in 1 nempe 1, quarum aggregatus eſt 26.

Etenim, Proprium numerorum huius progreſſionis duplæ illud eſt, vt quilibet ex ipſis v. g. ſextus 32, exponente ſuo minutus nempe 6, id eſt 26, æquetur ſummæ inferiorum numerorum huius progreſſionis, nempe 16 † 8 † 4 † 2 † 1 vnitate minutorum nempe, 15 † 7 † 3 † 1 † 0 nempe, 26. Vnde facilis eſt demonſtratio huius propoſitionis.

Problema I.

Dato quouis numero, inuenire ſummam omnium combinationum quæ in ipſo fieri poſſunt. *Abſque triang. arith.*

Numerus progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium cuius exponens proximè major est quam numerus datus, satisfaciet problemati, modò vnitate minuatur.

Sit numerus datus v. g. 5. quæritur summa omnium combinationum quæ in 5 fieri possunt.

Numerus *sextus* progressionis duplæ quæ ab vnitate incipit nempe 32 vnitate minutus nempe 31 satisfacit, ex lem. 6. ergo possunt fieri 31 combinationes in numero 5.

Problema 2.

Datis duobus numeris inæqualibus, inuenire quot modis minor in majore combinetur. *Absque triangulo arith.*

Hoc est propriè vltimum Problema tractatus triang. arith. quod sic resoluo.

Productus numerorum qui præcedunt differentiam datorum vnitate auctam, diuidat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit minor datorum vnitate auctus, quotiens est quæsitus.

Sint dati numeri 2, 6; Oportet inuenire quotmodis 2 combinetur in 6.

Assumatur eorum differentia 4 quæ vnitate aucta est 5. Iam assumantur omnes numeri qui præcedunt ipsum 5, nempe, 1, 2, 3, 4, quorum productus sit 24. Assumantur totidem numeri continui quorum primus sit 3, *nempe proximè major quam 2 qui minor est ex ambobus datis*, nempe, 3, 4, 5, 6, quorum productus 360, diuidatur per præcedentem productum 24. Quotiens 15 est numerus quæsitus. *Ita vt numerus 2, combinetur in 6, modis 15 differentibus.*

Nec difficilis demonstratio. Si enim quæratur in triangulo arithmetico quot modis 2 combinetur in 6, assumenda est cellula 3, basis 7, ex lemm. 5, nempe cellula ξ, & ipsius numerus exponet multitudinem combinationum numeri 2 in 6. Vt autem inueniatur numerus cellulæ ξ cuius radix est 5, & exponens seriei 3, oportet *ex probl. triang. arith. vt productus numerorum qui præcedunt 5, diuidat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit 3, & quotiens erit numerus cellulæ ξ*; Sed idem diuisor ac idem diuidendus in constructione huius propositus est, quare & eundem quotientem sortita est diuisio, ergò in hâc constructione repertus est numerus cellulæ ξ, quare & exponens multitudinis combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. F. E. D.

Monitum.

Monitum.

Hoc problemate tractatum hunc absoluere constitueram, non tamen omninò sine molestiâ, cùm multa alia parata habeam, sed vbi tanta vbertas vi moderanda est fames, his ergo pauca hæc subijciam.

Eruditissimus ac mihi charissimus. D. D. De Ganieres, circa combinationes, assiduo ac perutili labore, more suo, incumbens, ac indigens facili constructione ad inueniendum quoties numerus datus in alio dato combinetur, hanc ipse sibi praxim instituit.

Datis numeris v. g. 2, 6, *inuenire quot modis* 2, *combinetur in* 6.

Assumatur inquit *progressio* duorum *terminorum* quia minor numerus est 2 *inchoando à majore 6, ac retrogrediendo, seu detrahendo vnitatem ex vnoquoque termino, hoc modo, 6, 5; Deinde assumatur altera progressio inchoando ab ipso minore* 2 *ac similiter retrogrediendo hoc modo* 2, 1. *Multiplicentur inuicem numeri primæ progressionis, 6,5, sitque productus* 30. *Multiplicentur & numeri secundæ progressionis, 2, 1, sitque productus* 2. *Diuidatur major productus per minorem, Quotiens est quæsitus.*

Excellentem hanc solutionem ipse mihi ostendit, ac etiam demonstrandam proposuit, ipsam ego sanè miratus sum, sed difficultate territus vix opus suscepi, & ipsi authori relinquendum existimaui; Attamen trianguli arithmetici auxilio, sic procliuis facta est via.

In 5 lemm. huius, ostendi numerum cellulæ ξ, exponere multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quare ipsius reciproca cellula K eundem numerum continebit. *Verùm, cellula ipsa K est quotiens diuisionis in quâ productus numerorum* 1, 2, *qui præcedunt* 3 *radicem cellulæ* K, *diuidit productum totidem numerorum continuorum quorum primus est* 5 *exponens seriei cellulæ* K, *nempe numerorum* 5, 6. Sed ille diuisor ac diuidendus sunt ijdem ac illi qui in constructione *amici* sunt propositi, igitur eundem quotientem sortitur diuisio, quare ipse exponit multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. D.

Hac demonstratione assecutâ, jam reliqua quæ inuitus supprimebam libenter omitto, adeò dulce est amicorum memorari.

POTESTATVM NVMERICARVM SVMMA.

MONITVM.

Datis, ab vnitate, quotcunque numeris continuis, v. g. 1, 2, 3, 4, *inuenire ſummam quadratorum eorum, nempe* 1 † 4 † 9 † 16, *id eſt* 30, *tradiderunt veteres; imo etiam & ſummam cuborum eorundem, ad reliquas verò poteſtates non protraxerunt ſuas methodos, his ſolummodò gradibus proprias. Hîc autem exhibetur, non ſolùm ſumma quadratorum, & cuborum, ſed & quadrato-quadratorum, & reliquarum in infinitum poteſtatum. Et non ſolum à radicibus ab vnitate continuis, ſed à quolibet numero initium ſumentibus, verbi gratia numerorum* 8, 9, 10, *&c. Et non ſolum numerorum qui progreſſione naturali procedunt, ſed & eorum omnium qui progreſſione verbi gratia cujus differentia eſt,* 2, *aut* 3, *aut* 4, *aut alius quilibet numerus, formantur, vt iſtornm,* 1, 3, 5, 7, *&c. vel horum,* 2, 4, 6, 8, *qui per incrementum binarij augentur, aut horum,* 1, 4, 7, *&c qui per incrementum ternarij, & ſic de cæteris, ſed* & quod amplius eſt *à quolibet numero exordium ſumat illa progreſſio,* ſiue *incipiat ab vnitate, vt iſti,* 1, 4, 7, 10, 13, *&c. qui ſunt eius progreſſionis quæ per incrementum ternarij procedit, & ab vnitate ſumit exordium;* ſiuè *ab aliquo huius progreſſionis numero incipiat vt iſti,* 7, 10, 13, 16, 19, ſiue quod vltimum eſt, *à numero qui non ſit eius progreſſionis, vt iſti* 5, 8, 11, 14, *quorum progreſſio per ternarij differentiam procedit, & à numero* 5, ipſi progreſſioni extraneo, *exordium ſumit. Et* quod ſanè fœliciter inuentum eſt, *tam multi differentes caſus*, vnica ac generaliſſima *reſoluit* methodus; *adeò* ſimplex, *vt abſque litterarum auxilio, quibus difficiliores egent enuntiationes, paucis lineis contineatur. Vt ad finem problematis ſequentis patebit.*

Definitio.

Si binomium, cuius alterum nomen ſit A, alterum verò numerus quilibet vt 3, nempe A † 3, ad quamlibet conſtituatur poteſtatem vt ad quartum gradum, cujus hæc ſit expoſitio,

A^4 † 12, A^3 † 54, A^2 † 108, A † 81.

Ipſi numeri, 12, 54, 108, per quos ipſe A multiplicatur in ſingulis gradibus, quique partim ex numeris figuratis, partim ex numero 3, qui binomij eſt ſecundum nomen, formantur, vocabuntur *Coefficientes* ipſius A.

Erit ergo *in hoc exemplo*, 12 *coefficiens* A cubi, & 54 *coefficiens* A quadrati, & 108 *coefficiens* A radicis.

Numerus verò 81 *numerus abſolutus* dicetur.

Lemma.

Sit radix quælibet, 14; altera verò ſit binomium 14 † 3 cuius primum nomen ſit 14, alterum verò alius quilibet numerus 3, ita vt harum radicum, 14, & 14 † 3, differentia ſit 3. Conſtituantur ipſæ in quolibet gradu vt in quarto, ergò quartus gradus radicis 14 eſt 14^4. Quartus verò gradus binomij, 14 † 3, eſt,

14^4 † 12, 14^3 † 54, 14^2 † 108, 14 † 81

Cujus quidem binomij primum nomen 14, *eoſdem coefficientes ſortitur in ſingulis gradibus, quos A ſortitus eſt in ſimilibus gradibus in expoſitione eiuſdem gradus binomij* A † 3, *quod rationi conſentaneum eſt*, harum verò poteſtatum, nempe huius 14^4 & huius 14^4 † 12, 14^3 † 54, 14^2 † 108, 14 † 81, differentia eſt, 12, 14^3 † 54, 14^2 † 108, 14 † 81 quæ quidem conſtat Primò, ex radice 14 conſtitutâ in ſingulis gradibus propoſito gradui *quarto* inferioribus, nempe in *tertio* in *ſecundo* & in *primo*, & in vnoquoque multiplicatâ per *coefficientes* quos A ſortitur in ſimilibus gradibus, in expoſitione eiuſdem gradus binomij A † 3.

Deinde, ex ipſo numero, 3 *qui eſt differentia radicum* conſtituto in propoſito *quarto* gradu, *numerus enim abſolutus* 81 *eſt quartus gradus radicis* 3. Hinc igitur elicietur *Canon iſte*.

Duarum ſimilium poteſtatum differentia, *æquatur*, differentiæ radicum conſtitutæ in eodem gradu in quo ſunt poteſtates propoſitæ; *Plus* minori radice conſtitutâ in ſingulis gradibus propoſito gradui inferioribus ac in vnoquoque multiplicatâ per coefficientes quos A ſortiretur in ſimilibus gradibus, ſi binomium cuius primum nomen eſſet A, alterum verò eſſet differentia radicum, conſtitueretur in eadem poteſtate propoſita.

Sic ergo differentia inter 14^4 & 11^4, erit 12, 11^3, † 54, 11^2, † 108, 11, † 81.
Differentia enim radicum eſt 3.
Ec ſic de cæteris.

Ad ſummam Poteſtatum cujuſlibet progreſſionis inueniendam vnica ac generalis methodus.

Datis quotcunque numeris, in qualibet progreſſione, à quouis numero inchoante, inuenire quarumuis poteſtatum eorum ſummam.

Quilibet numerus, 5, *ſit initium progreſſionis quæ per incrementum cujuſuis numeri verbi gratia* ternarii *procedat*, *&* *in eâ progreſſione dati ſint quotlibet numeri verbi gratia iſti*, 5, 8, 11, 14, *qui omnes in quâcunque poteſtate conſtituantur vt in tertio gradu ſeu cubo. Oportet inuenire ſummam horum cuborum, nempe*, 5^3 † 8^3 † 11^3 † 14^3

Cubi illi ſunt 125 † 512 † 1331 † 2744, quorum ſumma eſt 4712 quæ quæritur & ſic inuenitur.

Exponatur binomium A † 3 *cuius primum nomen ſit A, alterum verò ſit numerus* 3 *qui eſt differentia progreſſionis.*

Conſtituatur binomium hoc A † 3 *in gradu* quarto *qui proximè ſuperior eſt propoſito* tertio *ſitque hæc eius expoſitio,*

$$A^4 + 12, A^3 + 54, A^2 + 108 A + 81$$

Iam aſſumatur numerus 17 *qui in progreſſione propoſitâ proximè ſequitur vltimum progreſſionis terminum datum* 14. *Et conſtituto ipſo* 17 *in eodem gradu* quarto *nempe,* 83521, *auferantur ab eo, hæc*

Primò, ſumma numerorum propoſitorum, 5 + 8 + 11 + 14, *nempe* 38 *multiplicata per numerum* 108, *qui eſt coefficiens ipſius A radicis.*

Secundò, ſumma quadratorum eorundem numerorum, 5, 8, 11, 14, *multiplicata per numerum* 54 *qui eſt coefficiens A, quadrati.*

Et ſic deinceps procedendum eſſet ſi ſupereſſent gradus alij inferiores ipſi gradui tertio qui propoſitus eſt.

Deinde, *auferatur* primus terminus *propoſitus* 5 *in* quarto *gradu conſtitutus.*

Denique, *auferatur* numerus 3 qui eſt differentia progreſſionis *in eodem gradu* quarto *conſtitutus, ac* toties *ſumptus*, quot *ſunt numeri propoſiti, nempe* quater *in hoc exemplo.*

Reſiduum, erit multiplex ſummæ quæſitæ, eamque toties *continebit,* quoties *numerus* 12 *qui eſt coefficiens ipſius A cubi, ſeu A in gradu* tertio *propoſito continet vnitatem.*

Si ergo ad *praxim* methodus reducatur, numerus 17 conſtituendus eſt in 4 gradu, nempe 83521, & ab eo hæc auferenda ſunt.

Primò, ſumma numerorum propoſitorum, 5 + 8 + 11 + 14 nempe 38, multiplicata per 108, vnde oritur productus 4104.

Deinde, ſumma quadratorum numerorum propoſitorum id eſt, $5,^2 + 8,^2 + 11,^2 + 14,^2$ nempe, 25 + 64 + 121 + 196, quorum ſumma eſt 406, quæ multiplicata per 54 efficit 21924.

Deinceps auferendus est numerus 5 in *quarto* gradu nempe, 625.

Denique auferendus est numerus 3 in *quarto* gradu nempe 81, *quater* sumptus nempe 324. Numeri ergo auferendi, illi sunt, 4104, 21924, 625, 324; quorum summa est, 26977, quæ ablata à numero, 83521, superest 56544.

Hoc ergo *residuum* continebit summam quæsitam nempe, 4712, multiplicatam per, 12; & profectò, 4712 per 12 multiplicata efficit, 56544.

Paradigma facilè est construere, hoc autem sic demonstrabitur.

Etenim, numerus 17 in 4 gradu constitutus qui quidem sic exprimitur, $17.^4$ æquatur, $17^4 - 14,^4 + 14^4 - 11,^4 + 11^4 - 8,^4 + 8^4 - 5^4 + 5^4$.

Solus enim 17^4 *signum affirmationis solum sortitur reliqui autem affirmantur ac negantur.*

Sed differentia radicum, 17, 14, est 3, eademque est differentia radicum 14, 11, eademque radicum 11, 8, ac etiam radicum, 8, 5. Igitur ex præmisso lemmate.

$17^4 - 14^4$ æquatur $12, 14^3 + 54, 14^2 + 108, 14 + 81$
Sic $14^4 - 11^4$ æquatur $12, 11^3 + 54, 11^2 + 108, 11 + 81$
Sic $11^4 - 8^4$ æquatur $12, 8^3 + 54, 8^2 + 108, 8 + 81$
Sic $8^4 - 5^4$ æquatur $12, 5^3 + 54, 5^2 + 108, 5 + 81$

Non interpretor 5^4.

Igitur 17^4 æquatur his omnibus.

$12, 14^3 + 54, 14^2 + 108, 14 + 81$
$+ 12, 11^3 + 54, 11^2 + 108, 11 + 81$
$+ 12, 8^3 + 54, 8^2 + 108, 8 + 81$
$+ 12, 5^3 + 54, 5^2 + 108, 5 + 81$
$+ 5^4$.

Hoc est *mutato ordine*. 17^4 æquatur his

$5 + 8 + 11 + 14$ multiplicatis per 108
$+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$ multiplicatis per 54
$+ 5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12
$+ 81 + 81 + 81 + 81$
$+ 5^4$.

Ablatis vndique his

$5 + 8 + 11 + 14$ multiplicatis per 108
$+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$ multiplicatis per 54
$+ 81 + 81 + 81 + 81$
$+ 5^4$.

Remanet 17^4 minus his nempe,

$- 5 - 8 - 11 - 14$ multiplicatis per 108
$- 5^2 - 8^2 - 11^2 - 14^2$ multiplicatis per 54
$- 81 - 81 - 81 - 81$
$- 5^4$.

æqualis $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12.

Q. E. D.

Sic ergo poteſt inſtitui enuntiatio & generalis conſtructio.

Summa Poteſtatum.

Datis quotcunque numeris, in quâlibet progreſſione, à quouis numero initum ſumente, inuenire ſummam quarumuis poteſtatum eorum.

Exponatur binomium, cuius primum nomen ſit A, alterum verò ſit numerus qui differentia progreſſionis eſt, & conſtituatur hoc binomium in gradu qui proximè ſuperior *eſt gradui propoſito, & in expoſitione poteſtatis eius notentur* coefficientes *quos A ſortitur in ſingulis gradibus.*

Conſtituatur & in eodem gradu ſuperiori numerus qui *in eâdem progreſſione propoſitâ* proximè ſequitur vltimum *progreſſionis terminum propoſitum. Et ab eo* auferantur *hæc.*

Primò, primus terminus *progreſſionis datus, ſeu minimus numerus datorum in eodem* ſuperiori gradu *conſtitutus.*

Secundò, *numerus qui* differentia eſt progreſſionis *in eodem* ſuperiori gradu *conſtitutus, ac* toties *ſumptus* quot *ſunt termini dati.*

Tertiò, *auferantur* ſinguli numeri *dati, in* ſingulis gradibus *propoſito gradui* inferioribus *conſtituti, ac in vnoquoque gradu multiplicati per* jam notatos coefficientes *quos A ſortitur in iiſdem gradibus in expoſitione huius* ſuperioris *gradus binomij primò aſſumpti.*

Reliquum *eſt multiplex ſummæ quæſitæ, eamque* toties *continet* quoties coefficiens *quem A in gradu* propoſito *ſortitur continet vnitatem.*

Monitum.

Praxes jam particulares ſibi quiſque pro genio ſuppeditabit, verbi gratia. Si quæris ſummam quotlibet numerorum progreſſionis naturalis à quolibet inchoantis hic, ex methodo generali, elicietur *Canon.*

In progreſſione naturali à quouis numero inchoante, differentia inter quadratum minimi termini & quadratum numeri qui proximè major eſt vltimo termino, minuta numero qui exponit multitudinem, dupla eſt aggregati ex omnibus.

Sint quotlibet numeri naturali progreſſione continui, quorum primus ſit ad libitum, v.g. *quatuor* iſti 5, 6, 7, 8. Dico. $9^2 — 5^2 — 4$ æquari 5 † 9 † 7 † 8.

Similes canones & reliquarum poteſtatum ſummis inueniendis & reliquis progreſſionibus facilè aptabuntur, quos quiſque ſibi comparet.

Concluſio.

Quantùm hæc notitia ad ſpatiorum curuilineorum dimenſiones conferat, ſatis norunt qui in indiuiſibilium doctrinâ tantiſper verſati ſunt. Omnes enim omnium generum Parabolæ illicò quadrantur, & alia innumera facillimè menſurantur.

Si ergo illa, quæ hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi poſſunt inſtitui canones.

Canones ad naturalem progreſſionem quæ ab vnitate ſumit exordium.

Summa linearum, eſt ad quadratum maximæ, vt	1 ad 2
Summa quadratorum eſt ad cubum maximæ vt	1 ad 3
Summa cuborum eſt ad 4 gradum maximæ vt	1 ad 4.

Canon generalis ad progreſſionem naturalem quæ ab vnitate ſumit exordium.

Summa omnium in quolibet gradu, eſt ad maximam in proximè ſuperiori gradu, vt vnitas, ad exponentem ſuperioris gradus.

Non de Reliquis diſſeram quia hîc locus non eſt, hæc obiter notaui,

reliqua

reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, *in continuâ quantite, quotlibet quantitates cujusuis gereris quantitati superioris generis additas; nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineæ superficiebus; superficies solidis, nihil adijciunt, seu, *vt numericis, in numerico tractatu, verbis vtar,* Radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, &c. nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Hæc, quæ indiuisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, vt nunquam satis mirata connexio, quâ ea etiam quæ remotissima videntur, in vnum addicat vnitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuæ dimensionem*, cum *numericarum potestatum summâ*, conjunctam contemplari licet.

De Nvmeris Mvltiplicibvs.

Ex ſola characterum numericorum additione agnoſcendis.

Monitvm.

Nihil tritius eſt apud arithmeticos, quàm numeros, numeri 9 multiplices, conſtare characteribus, quorum aggregatum eſt quoque ipſius 9 multiplex. Si enim ipſius v. g. dupli, 18, characteres numericos, 1, † 8, jungas, aggregatum erit 9. Ita vt ex ſolâ additione characterum numericorum numeri cujuſlibet, liceat agnoſcere, vtrum ſit ipſius 9 multiplex. v. g. ſi numeri, 1719 characteres numericos jungas, 1 † 7 † 1 † 9, aggregatum 18 eſt ipſius 9 multiplex, vnde certò colligitur, & ipſum 1719 eiuſdem 9 eſſe multiplicem, vulgata ſanè illa obſeruatio eſt, verùm eius demonſtratio à nemine quod ſciam data eſt, nec ipſa notio vlteriùs prouecta. In hoc autem Tractatulo non ſolùm iſtius ſed & variarum aliarum obſeruationum generaliſſimam demonſtrationem dedi, ac methodum vniuerſalem agnoſcendi ex ſolâ additione characterum numericorum propoſiti cujuſuis numeri, vtrum ille ſit alterius propoſiti numeri multiplex; Et non ſolùm in progreſſione denariâ, quâ numeratio noſtra procedit, (denaria enim ex inſtituto hominum, non ex neceſſitate naturæ vt vulgus arbitratur) & ſanè ſatis inepte poſita eſt. Sed in quâcunque progreſſione inſtituatur numeratio, non fallet hîc tradita methodus, vt in paucis mox videbitur paginis.

Propoſitio vnica.

Agnoſcere ex ſola additione characterum dati cujuſlibet numeri, an ipſe ſit alterius dati numeri multiplex.

Vt hæc ſolutio fiat generalis, litteris vtemur vice numerorum. Sit ergo diuiſor, numerus quilibet expreſſus per litteram A; diuidendus autem, numerus expressus per litteras T V N M, quarum vltima M exprimit numerum quemlibet in vnitatum columnâ collocatum; N, verò, numerum quemlibet in denariorum columnâ; V, numerum quemlibet in columnâ centenariorum; T, autem numerum quemlibet in columnâ millenariorum, & sic deinceps in infinitum: ita vt si litteras in numeros conuertere velis, assumere possis loco ipsius, M, quemlibet ex nouem primis characteribus verbi gratia 4, loco N quemlibet numerum vt 3, loco V quemlibet numerum vt, 5; & loco T, quemlibet numerum vt 6; & collocando singulos illos characteres numericos in propria columna; prout collocatæ sunt litteræ quæ illos exprimunt, proueniet hic numerus, 6 5 3 4, diuisor autem A erit numerus quilibet vt 7. Missis autem peculiaribus his exemplis generali ista enunciatione omnia amplectimur.

Dato quocumque diuidendo T V N M, & quocumque diuisore A, agnoscere ex sola additione characterum numericorum T,V,N,M, vtrum ipse numerus T V N M exactè diuidatur per ipsum numerum A.

Ponantur seorsim numeri serie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, & cæt. à dextrâ ad sinistram sic.

& cæt.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
& cæt.	K	I	H	G	F	E	D	C	B	1

Iam ipsi primo numero, 1, subscribatur vnitas.

Ex ipsa vnitate *decies* sumpta, seu ex 10 auferatur A quoties fieri poterit, & supersit B qui sub 2 subscribatur.

Ex B *decies* sumpta seu ex 10 B, auferatur A quoties poterit, & supersit C qui ipsi 3 subscribatur.

Ex 10 C, auferatur A quoties poterit & supersit D qui ipsi 4 subscribatur.

Ex 10 D, auferatur A &c. in continuum.

Nunc sumatur vltimus character diuidendi M, qui quidem & primus est à dextra ad sinistram, scribaturque seorsim semel; *Primo enim numero* 1, *subjacet vnitas.* M

Iam, sumatur secundus character N & toties repetatur quot sunt vnitates in B, *qui secundo numero subjacet*, hoc est multiplicetur N per B & sub M ponatur productus. N in B

Iam sumatur tertius character V, & toties repetatur quot sunt vnitates in C, *sub tertio numero subjecto*, seu multiplicetur V per C & productus sub primis ponatur. V in C

Sic denique multiplicetur quartus T per D, & sub aliis scribatur. T in D

Et sic in infinitum.

Dico prout summa horum numerorum, M, † N in B, † V in C, † T in D, est ipsius A multiplex aut non, & quoque ipsum numerum T V N M, esse eiusdem multiplicem, vel non.

Etenim si propositus diuidendus *vnicum* haberet characterem M ſanè prout ipſe eſſet multiplex ipſius A, numerus quoque M eſſet eiuſdem A multiplex, cum ſit ipſe numerus totus.

Si verò conſtet *duobus* characteribus, N M,

Dico quoque, prout M, † N in B, eſt multiplex A, & ipſum numerum, N M, eiuſdem multiplicem eſſe.

Etenim character N in columna denarij, æquatur 10 N,

Verum ex conſtructione, eſt	10—B. multiplex A
Quare ducendo 10—B in N eſt	10 N—B in N multiplex A
Si ergo contingit & eſſe	M, † B in N multiplicem A
Ergo ambo vltimi multiplices juncti	10 N † M erunt multipl. A
Id eſt N in columna denarij & M in columna vnitatis, ſeu numerus	N M eſt multiplex A.

Q. E. D.

Si numerus diuidendus conſtet *tribus* characteribus, V N M,

Dico quoque ipſum eſſe aut non eſſe multiplicem A,

provt, M, † N in B † V in C, erit ipſius A multiplex, vel non.

Etenim character V, in columna centenarij, æquatur 100, V.

At ex conſtructione, eſt	10—B, multiplex, A,
Quare multiplicando 10—B per 10	100—10 B, multip. A,
Et ducendo ipſos in V	100 V—10 B in V, mult. A,
Sed eſt etiam ex conſtructione,	10 B—C, multip. A,
Quare ducendo in V,	10 B in V—C in V, mult. A,
Sed ex oſtenſis	100 V—10 B, in V, mult. A,
Ergo juncti duo vltimi	100 V—C in V, mult. A,
Iam verò oſtendemus vt in ſecundo caſu	10 N—B in N, mult. A,
Ergo juncti duo vltimi	100 V † 10 N—C in V—B in N, mult. A,
Ergo ſi contingat hos numeros	C in V † B in N † M, eſſe mult. A,
Ambo vltimi juncti nempe	100 V, † 10 N, † M; & mult. A,

Seu V in columna centenarij N denarij & M vnitatis, hoc eſt numerus V N M, eſt multiplex, A. Q. E. D.

Non ſecus demonſtrabitur de numeris ex *pluribus* characteribus compoſitis. Quare prout &c. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus.

QVæro, qui ſint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſubſcribo, 1, ſub 1.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Ex vnitate decies ſumpta, ſeu ex 10 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 3 quem pono ſub 2,

Ex 3 decies ſumpto, ſeu ex 30 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 2 quem pono ſub 3,

Ex 20 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 6 & pono ſub 4,

Ex 60 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 4 & pono ſub 5,
Ex 40 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 5 & pono ſub 6,
Ex 50 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 1 & pono ſub 7,
Ex 10 aufero 7 quoties poteſt, & redit 3 & pono ſub 8,
Ex 30, aufero 7 quoties poteſt, & redit 2 & pono ſub 9,
Et ſic redit ſeries numerorum, 1, 3, 2, 6, 4, 5, in infinitum.

Iam proponatur numerus quilibet, 287542178,
De quo quæritur vtrum exactè diuidatur per 7
hoc ſic agnoſcetur.

Sumatur *ſemel* eius character qui primus eſt à dextrâ ad ſiniſtram, nempe 8 *primo enim numero ſeriei continuæ ſubiacet vnitas*

Quare ponatur ille, 8, primus character *ſemel*	8
Secundus, qui eſt 7, *ter* ſumatur, ſeu per 3 multiplicetur, *ſecundo enim numero ſeriei ſubiacet* 3, ſitque productus	21.
Tertius *bis* ſumatur, *ſubiacet enim* 2 *ipſi* 3, quare tertius character qui eſt 1 per 2 multiplicatus ſit	2:
Quartus eadem ratione per 6 multiplicatus	12:
Quintus per 4 multiplicatus	16:
Sextus per 5 multiplicatus	25:
Septimus *ſemel, ſeptimo enim ſubiacet* 1,	7:
Octauus, ter ſumptus	24:
Nonus bis ſumptus	4
Et ſic deinceps ſi ſupereſſent. Iungantur hi numeri	119

Si ipſe aggregatus, 119, eſt multiplex ipſius 7, numerus quoque propoſitus, 287542178, eiuſdem 7, multiplex erit.

Poteſt autem dignoſci eadem methodo, vtrum ipſe 119 ſit multiplex 7 ſcilicet, ſumendo ſemel primum characterem	9:
ſecundum characterem ter	3:
& præcedentem bis	2:
	14

Si enim ſumma 14 eſt multiplex 7 erit & 119 eiuſdem multiplex.

Sed & ſi, curioſitate potius quam neceſſitate moti, velimus agnoſcere vtrum 14 ſit multiplex 7 ſumatur character vltimus ſemel	4:
& præcedens ter	3:
	7:

Si ſumma eſt multiplex ipſius 7 erit & 14 multiplex 7, quare & 14, & 119, &, 287542178.

Vis agnoſcere quinam numeri diuidantur per 6.

Scriptis, vt ſæpius dictum eſt, numeris naturalibus 1,2,3,4,5, &c. & 1 ſub, 1, poſito

&c.	4	3	2	1
&c.	4	4	4	1

Ex 10 aufer 6 reliquum 4, ſub 2 ponito
Ex 40 aufer 6 reliquum 4, ſub 3 ponito
Ex 40 aufer 6 reliquum 4, ſub 4 ponito
Et ſic ſemper redibit 4, quod agnoſci potuit vbi ſemel rediit.

Ergo, ſi proponatur numerus quilibet, de quo quærebatur vtrum ſit diuidendus per 6 nempe 248742? ſume vltimam eius figuram

ſemel	2:
præcedentem quater	16:
præcedentem quater &c.	28:
&, vno verbo, primam ſemel, reliquarum verò	32
ſummam quater,	16
	8
ſi ſumma 102 diuidatur per 6 diuidetur & ipſe	102

numerus propoſitus 248742 per eumdem 6.

VIs agnoſcere vtrum numerus diuidatur per 3.
Scriptis vt prius numeris naturalibus, & 1 ſub 1 poſito,

5 4 3 2 1
1 1 1 1 1

Ex 10 aufer 3 quoties poteſt, reliqum 1 ſub 2 ponito
Ex 10 aufer 3 quantum poteſt reliqum 1 ſub 3 ponito
& ſic in infinitum.
Ergo ſi proponatur numerus quilibet, 2451,
vt ſcias vtrum diuidatur per 3

ſume ſemel vltimam figuram	1:
præcedentem ſemel	5:
& ſemel ſingulas	4:
	2:
	12:

ſi ſumma diuidatur per 3, diuidetur & numerus propoſitus per 3.

VIs agnoſcere vtrum numerus diuidatur per 9.
Scriptis numeris 1, 2, 3, &c. & 1 ſub 1 poſito.

Ex 10, aufer 9, & quoniam ſupereſt 1, patet, *vnitatem* contingere ſingulis numeris. Ergo; ſi numeri propoſiti ſinguli characteres ſimul ſumpti diuidantur per 9, diuidetur & ipſe.

VIs agnoſcere vtrum numerus diuidatur per 4.
Scriptis numeris naturalibus, vt mos eſt, & poſito 1 ſub 1.

4 3 2 1
0 0 2 1

Ex 10, aufer 4 quantum poteſt reliqum 2 pone ſub 2,
Ex 20, aufer 4 quantum poteſt reliqum 0, pone ſub 3,
Ex 00, aufer 4, ſupereſt ſemper 0,
Quare ſi proponatur numerus diuidendus, 2486,

pono vltimum characterem semel praecedentem bis, *subiacet enim 2 sub 2*,

6:
16:
22:

Praecedens per o multiplicatus facit zero & sic de reliquis; quare ad ipsos non attendito; & si summa priorum, nempe 22, per 4 diuidatur, diuidetur & ipse, secus autem, non.

SIc numeri quorum vltimus character semel, praecedens bis, praecedens quater, (*reliquis neglectis*, *zero enim sortiuntur*) simul iuncti numerum efficiunt multiplicem 8, sunt ipsi & eiusdem 8 multiplices, secus autem, non.

In exemplum autem dabimus & illud.

AGnoscere qui numeri diuidantur per 16. Scriptis vt dictum est numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. &, 1, sub, 1, posito.

7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	8	4	10	1

Ex 10, aufer 16 quantum potest; superest ipse 10, *Ex minore enim numero major numerus subtrahi non potest*, *quare ipsemet numerus* 10 *ponatur sub* 2.

Ex ipso 10 decies sumpto, vt mos est, seu ex 100, aufero 16 quantum potest, superest 4 quem pono sub 3.

Ex 40, aufero 16 quantum potest, reliquum 8 pono sub 4.

Ex 80 aufero 16 quantum potest, superest, o.

Ideo omnis numerus cuius vltimus character semel sumptus, penultimus decies, praecedens quater, & praecedens octies, efficiunt numerum multiplicem 16, erit & ipse ipsius 16 multiplex.

Sic reperies omnes numeros, quorum penultimus character decies, reliqui autem omnes scilicet vltimus, ante penultimus, praeante penultimus, & reliqui semel sumpti, efficiunt numerum diuisibilem per 45, vel 18, vel 15, vel 30, vel 90, & vno verbo omnes diuisores numeri 90, duobus constantes characteribus, diuidi quoque & ipsos per hos diuisores.

NOn difficilis inde ad alia progressus, sed intentatam huc vsque materiam aperuisse, & satis obscuram lucidissima demonstratione illustrauisse, sufficit. Ars etenim illa, qua ex additione characterum numeri, noscitur per quos sit diuisibilis, ex ima numerorum naturâ, & ex eorum denariâ progressione vim suam sortitur, si enim aliâ progressione procederent, verbi gratiâ, duodenariâ (quod sanè gratum foret) & sic vltra primas nouem figuras, aliae duae institutae essent, quarum altera denarium, altera vndenarium exhiberet; Tunc non ampliùs contingeret, numeros quorum omnes characteres simul sumpti efficiunt numerum multiplicem 9 esse & ipsos eiusdem 9 multiplices.

Sed methodus nostra, necnon & demonstratio, & huic progressioni, & omnibus possibilibus conuenit.

Si enim in hac duodenaria progreſſione, proponitur agnoſcere an numerus diuidatur per 9.

Inſtituemus vt antea numeros naturali ſerie continuos 1, 2, 3, 4, 5, &c. & 1 ſub 1 poſito

4 3 2 1
0 0 3 1

Ex vnitate jam duo decies ſumpta ſeu ex 10, (*qui jam poteſt duodecim*; non autem *decem*) auferendo 9 quantum poteſt, ſupereſt 3, quem pono ſub 2.

Ex 30, (qui jam poteſt *triginta ſex* ſcilicet *ter duodecim*) aufer 9 quantum poteſt, & ſupereſt nihil, continetur enim 9 quater exactè in *triginta ſex*; pono igitur, 0, ſub, 3.

Et ideo, zero ſub reliquis characteribus continget.

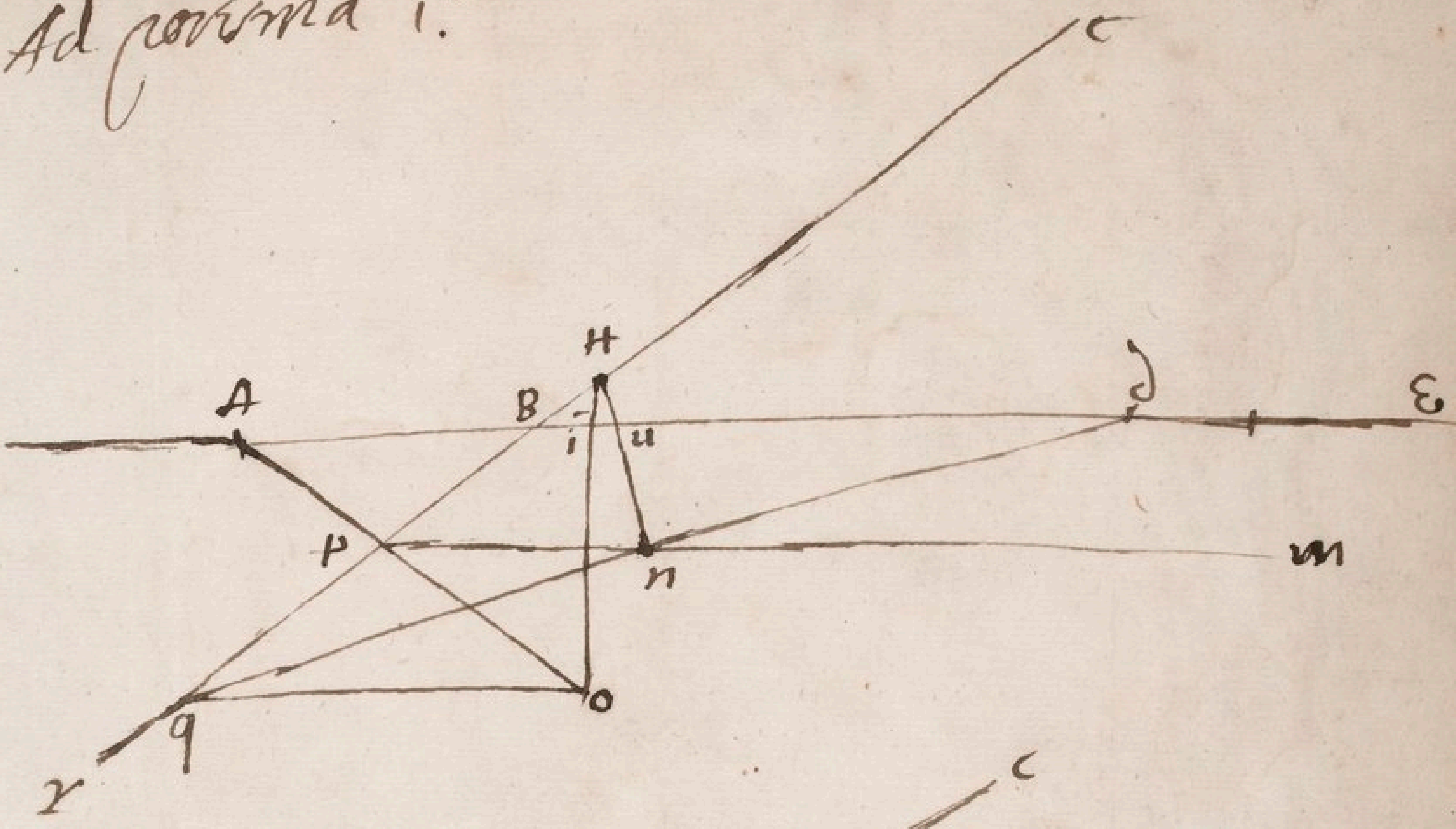
Vnde colligo, omnes numeros, quorum vltimus character ſemel ſumptus, penultimus verò ter, (*de cæteris non curo quales ſint, zero enim ſortiuntur*) efficiunt numerum diuiſibilem per 9, diuidi quoque per 9, in duodenaria progreſſione.

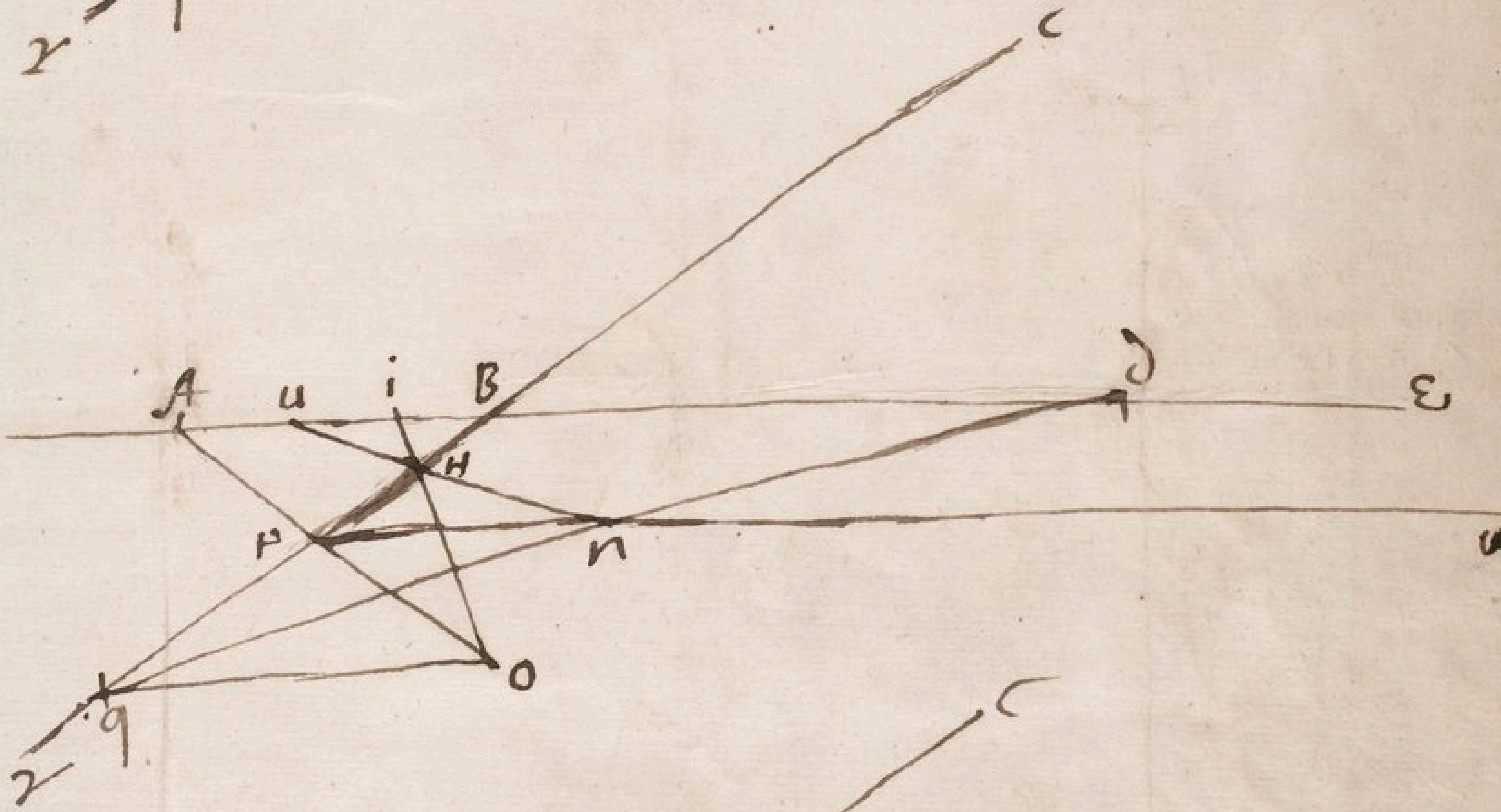
Sic in hac progreſſione duodenaria omnes numeri quorum ſinguli characteres ſimul ſumpti efficiunt numerum diuiſibilem per 11, ſunt & diuiſibiles per eumdem.

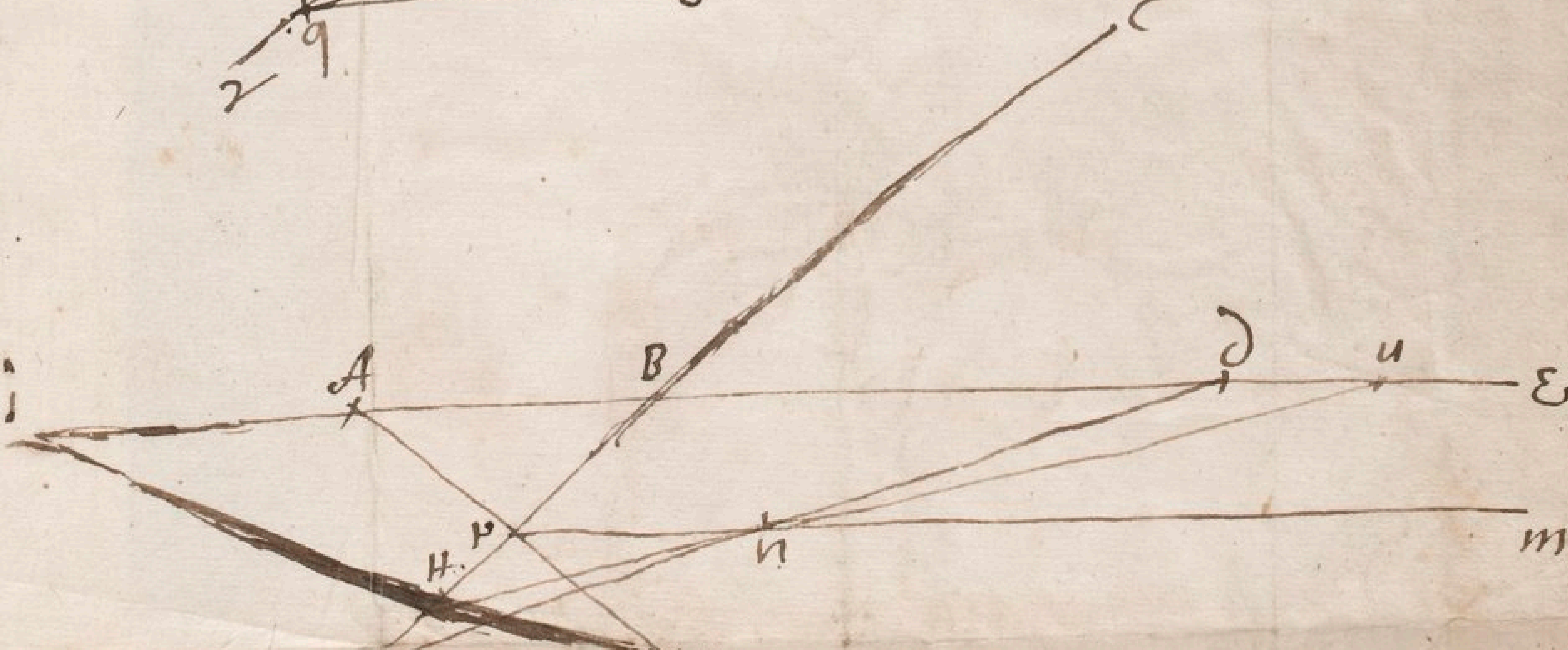
IN noſtra verò progreſſione denaria, contingit omnes numeros diuiſibiles per 11, ita ſe habere, vt vltimus ſemel ſumptus, penultimus decies, præcedens ſemel, præcedens decies, præcedens ſemel, præcedens decies, & ſic in infinitum, conflare numerum multiplicem 11.

Hæc & alia facili ſtudio, ex iſta methodo quiſque colliget; Tetigimus quidem quoniam intentata placent, relinquimus verò ne nimia perſcrutatio tædium pariat.

Ad proxima 1.um



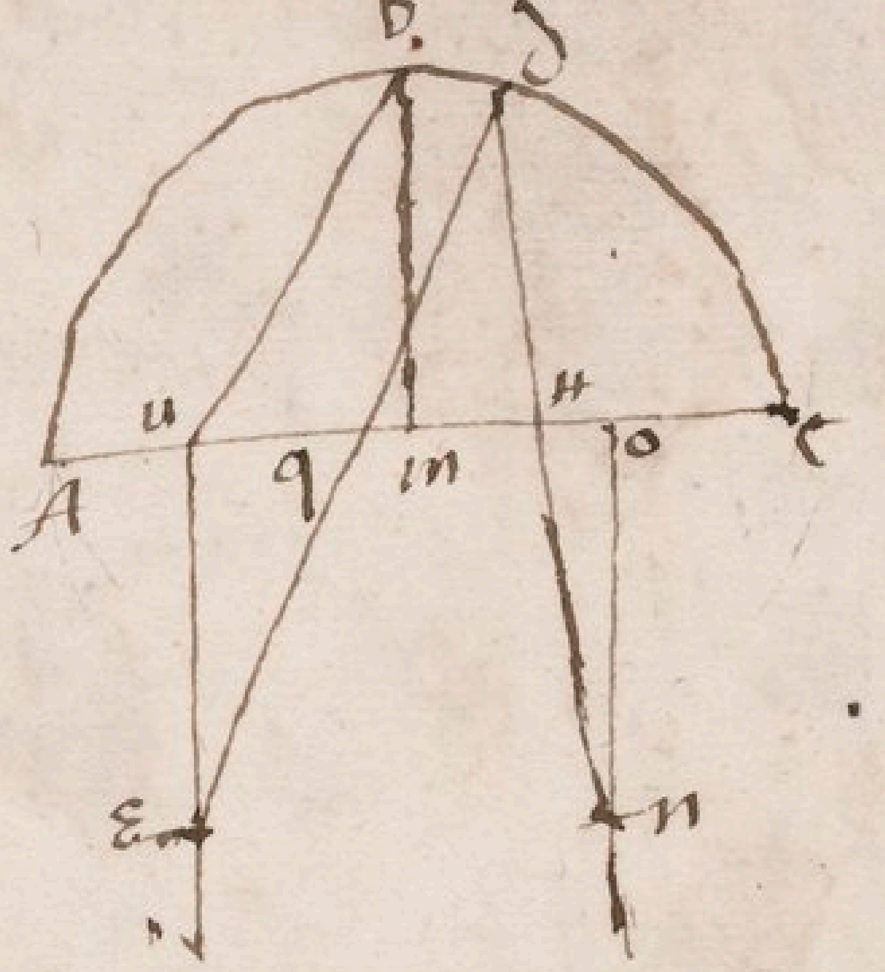


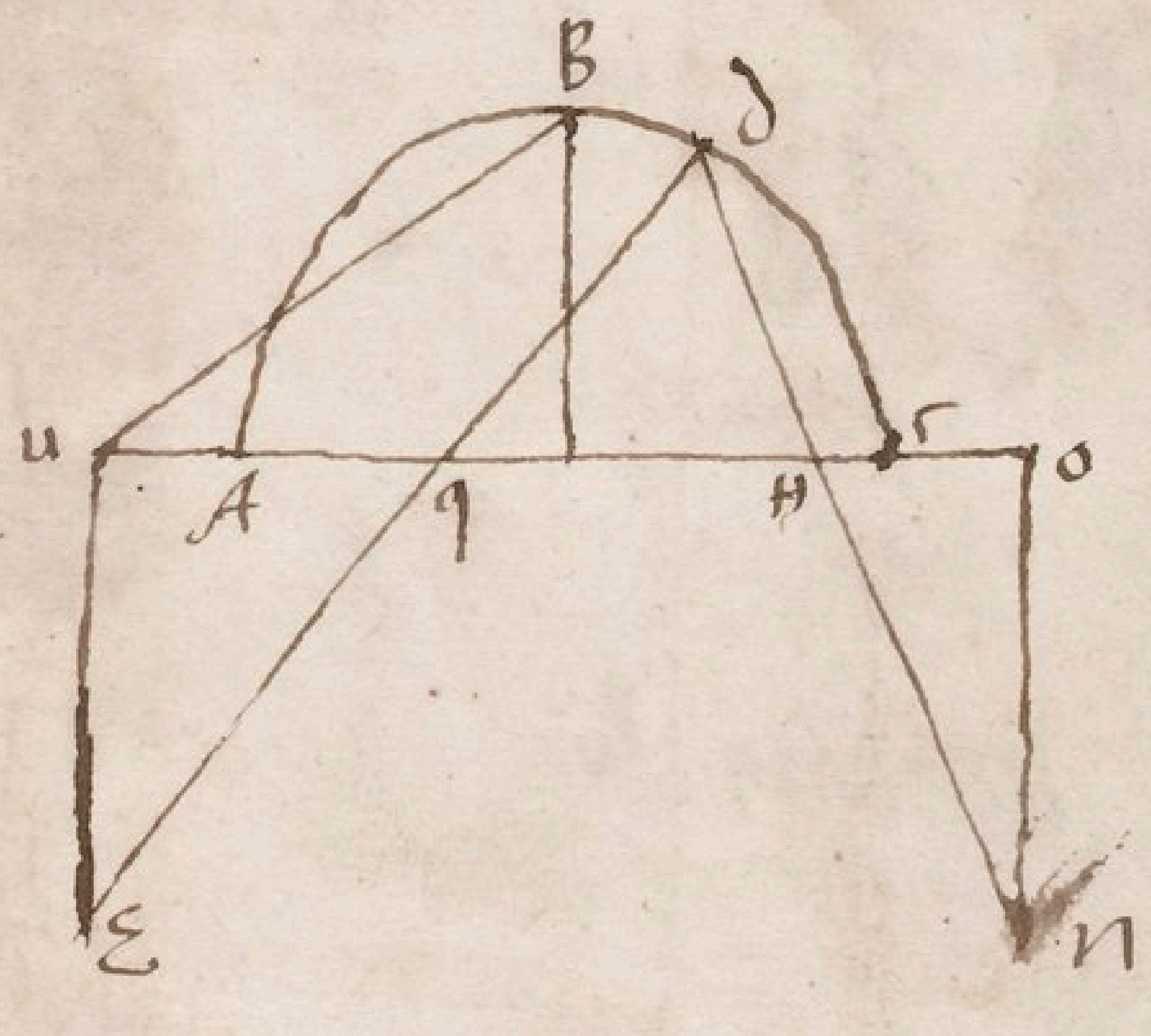


1.um porisma

Datis positione duabus rectis ABE, VBC sese
in puncto B secantibus. Datis etiam punctis A et
D in recta ABD. quaerantur duo puncta, exempli
gratia O et N. a quibus si ad quodlibet
rectae VBC punctum ut H recta OHN inflectatur
rectam ABD in punctis I et U secans, rectangulum
sub AI in DU aequetur spatio dato, videlicet
rectangulo sub AB in BD. Ita praedicta porismatica
Euclidis constructio, et generalissimam problematis
solutionem repraesentabit. Sumatur punctum
quodvis O. Jungatur recta AO secans rectam VBC
in puncto P. A puncto O ducatur recta OQ ipsi
ABD parallela et rectae VBC occurrens in Q. Ducatur
etiam infinita PNM ipsi ABD parallela, et iuncta
QD secet rectam PNM in puncto N. Aio duo puncta
O et N adimplere propositum. Sumpto quippe
ubilibet in recta VBC puncto H et ductis rectis
OH, NI rectae ABD occurrentibus in punctis I et
U, rectangulum sub AI in DU, in quibuslibet
omnino casibus (tres tantum triplex figura
repraesentabit) rectangulo ABD aequale erit.

Ad porisma 2um





Circulos nos adimplevimus licet propositio
totâ circumferentiâ locum habeat.

2um porisma

Dato circulo ABCε cuius diameter AC, centrum m, quaeruntur duo puncta ut ε et n a quibus si ad quodvis circumferentiae punctum ut d inflectantur rectae εd, nd, diametrum in punctis q et H secantes, summa quadratorum qd et dH ad triangulum qdH habeat rationem datam, idemque in qualibet inflexione generaliter & absque fine contingat. A centro m erigitur ad diametrum perpendicularis mB, fiat ratio data eadem quae quadrupla rectae Bu ad rectam um. A puncto u erigitur uε ad diametrum perpendicularis et ipsi uB aequalis, et sumpta recta uo ipsi mu aequali fiat on aequalis et parallela rectae uε. Aio puncta quaesita esse puncta ε et n. Sumpto quolibet circumferentiae puncto ut d et iunctis εd, nd rectis diametrum in punctis q et H secantibus, summa quadratorum qd et dH ad triangulum qdH erit in quocumque casu in ratione data, hoc est in ratione quadruplae Bu ad rectam um.

Non solum proponitur inquirenda istius porismatis demonstratio, sed videant etiam subtiliores Mathematici an duo alia puncta praeter ε et n possint problemati proposito satisfacere, et utrum plurium quaestionum sicut in primo porismate suppetant infinita. Si invenerint, spondeant scientiae in hac parte laboranti non dedignentur opitulari.

Solutio problematis a dno de Pascal propositi.

Proposuit dominus de Pascal, dato trianguli
angulo ad verticem, et ratione quam habet
perpendiculum ad differentiam laterum, invenire
speciem trianguli.

Exponatur recta quaevis data AC, super quam
portio circuli AIC capax anguli dati describatur.
Eo quaestionem deduximus ut data basi AC, angulo
verticis AIC et ratione quam habet perpendiculum
ad differentiam laterum, quaeratur triangulum.
Ponatur iam factum esse, et triangulum quaesitum
esse AIC, demittatur perpendiculum IB, et diviso
arcu AFC bifariam in F, iungantur FA, FC, et
iunctâ FI demittantur in rectas AI, IC perpendiculares
co, FK: deinde centro F intervallo FA describatur
circulus AHGEC cui rectae CI, FI continuatae
occurrant in punctis G, H, E, denique iungatur GA.
Angulus AFC ad centrum duplus est anguli AGC ad
circumferentiam, sed angulus AIC aequatur angulo AFC
in eadem portione. Igitur angulus AIC duplus est anguli
AGC, sed angulus AIC aequatur duobus angulis
AGC, IAG. Igitur anguli IGA, IAG sunt aequales
ideoque rectae IA, IG. Sed cum a centro F in rectam
GC cadat perpendicularis FK, aequales sunt GK, KC,
ideoque KI est dimidia differentia inter rectas CI, IG,
hoc est inter rectas CI, IA. Data est autem ratio perpendiculi

Bi ad differentiam cubicum ci, iA. Ergo datur ratio
Bi ad ik, et singulis in rectam Ac ductis data est
ratio rectanguli sub Ac in Bi ad rectangulum sub Ac
in ik, sed rectangulum sub Ac in Bi aequatur
rectangulo sub Ai in co, est enim utrumque dimidium
trianguli Aic, ergo ratio rectanguli sub Ai in co ad
rectangulum sub Ac in ik data est. Datur autem ex
hypothesi angulus Aic, et rectus est coi ex constructione
Ergo datur specie triangulum coi; ratio igitur co ad ci
data est ideoque rectanguli sub Ai in co ad rectangulum
sub Ai in ic ratio datur. Sed probavimus rationem
rectanguli sub Ai in oc ad rectangulum sub Ac in ik
dari, ergo datur ratio rectanguli Aic ad rectangulum
sub Ac in ik. Jam in triangulo Afc ipsa specie datur
angulus Afc ex hypothesi, ergo angulus fAc datur, cui
aequalis cif ideirco dabitur, est autem rectus angulus fKi,
Ergo triangulum fik datur specie ideoque rectae Ki ad if
ratio data est, ideoque rectanguli Ac in ik ad rectangulum
sub Ac in if datur ratio. Probatum est autem dari
rationem rectanguli Ai in ic ad rectangulum Ac in ik
Ergo datur ratio rectanguli Ai in ic ad rectangulum
Ac in if. Est autem rectangulum cif aequale rectangulo
ciA, quia rectae if, iA sunt aequales, et rectangulo cif
aequatur rectangulum HiE, ergo ratio rectanguli HiE
ad rectangulum sub Ac in if data est. Sit data ratio
ED ad Ac, cum igitur Ac sit data, dabitur ED quae
ponatur rectae HE in directum ut in figura. Rectanguli
igitur HiE est ad rectangulum Ac in if in ratione
data DE ad Ac, sed ut DE ad Ac ita DE in if ad
Ac in if, igitur est ut rectangulum HiE ad rectan-
gulum Ac in if ita rectangulum DE in if ad idem

5*

rectangulum AC in IF. Rectangulum igitur DE in IF
aequatur rectangulo HIE. Probatum est triangulum AF
dari specie, sed datur basis AC magnitudine, Ergo datur
~~datur~~ AF, ideoque dupla ipsius, HE datur. Aequalibus
rectangulis DE in IF et HIE addatur rectangulum sub
DE in IH. Fit rectangulum sub DE in FH aequale
rectangulo DIH. Datur autem rectangulum sub DE in
FH quia utraque rectarum DE, FH datur. Datur igitur
rectangulum DIH. Et ad datam magnitudinem DH applicatur
deficiens figura quadrata. Ergo recta IH datur, ideoque
reliqua IF. Datur autem punctum F positione, Ergo
datur et punctum I, et totum triangulum AIC, ut est
facilis ab analysi ad synthesin regressus.

Sed, ut omne dubium tollatur, probatur facillime
triangulum quaesitum esse simile inuento AIC. in 2a.
figura (cum triangulum AIC ex utraque parte puncti
F constitui possit, in aequali a puncto F
utrinque distantia. Erit enim idem specie et magnitudine
licet positio varient). Si enim triangulum quaesitum non
est simile inuento, manente eadem basi, eius vertex
vel erit inter puncta F et I, vel inter puncta I et A.
(Ex utraque parte nihil interest. Nam ex parte FC idem
eandem triangulum AIC pari demonstratione concludit)
Sit primum vertex inter A et I et triangulum quaesitum
ponatur, si fieri potest, simile triangulo AMC. Jungatur
FM et demittatur perpendicularis FP. Erit ratio per-
pendiculi MN ad MP data ex hypothesi, ideoque aequalis
rationi IB ad IK quam probauimus datae aequalem.
Quod est absurdum, Cum enim in triangulo FMP angulus
ad M aequatur angulo ad I trianguli IFK erunt
similia triangula FIK, FMP, sed FM est maior FI
ergo MP est maior IK. Est autem MN minor IB
Non igitur eadem potest esse ratio MN ad MP quae IB ad IK

Si punctum in sit inter b et f, probabitur angulus perpendicularem et minimi differentiam laterum idque eadem argumentatione, idque variare proportionem, si punctum in sit in portione fe, utemur sitando triangulo Aie: Et erit eadem demonstratio, et inutile sit diutius in his casibus immorari. Constat igitur triangulum quaesitum inuento Aie esse simile, et patet proposito esse satisfactum.

Proponitur si placet, a nobis ajas, tam dno de Pascal quam dno de Roberval soluendum hoc problema.

Ad datum punctum in Helice Galilaei inuenire tangentem. Quaenam autem sit huiusmodi Helix norunt dnus de Roberval.

Huius problematis a nobis soluti, solutionem a uiris Eruditissimis expectamus: aut si maluerint ipsis impertiemur, imo et generalem de linearum curuarum contactibus methodum.

Sed ne a praesenti materia triangulorum, uacuis manibus discedamus. Proponi possunt hae quaestiones.

Datâ basi, angulo uerticis, et aggregato perpendiculi ac differentiae laterum inuenire triangulum.

Datâ basi, angulo uerticis et differentiâ perpendiculi et differentiae laterum, inuenire triangulum

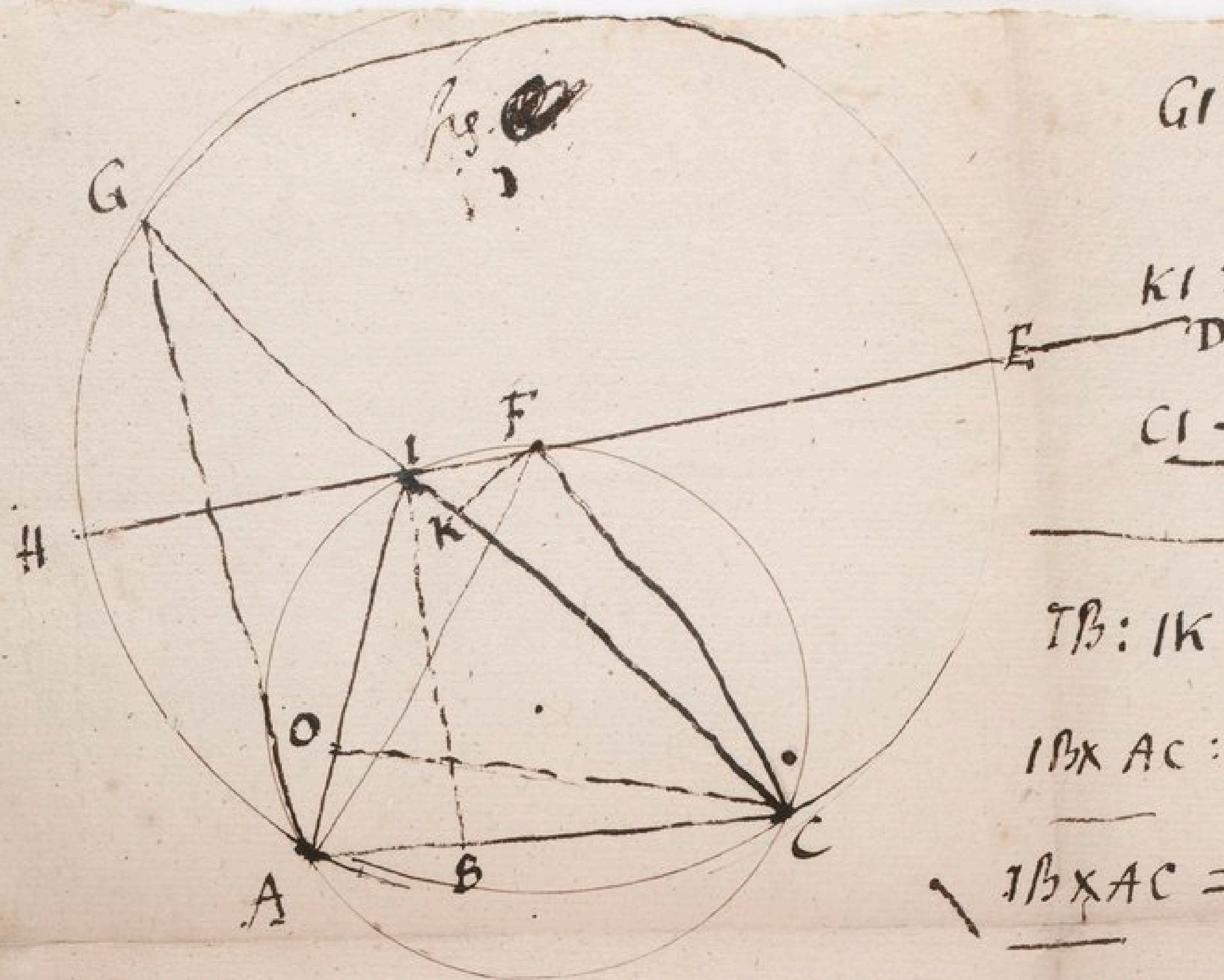
Datâ basi angulo uerticis et rectangulo sub differentiâ laterum in perpendiculum, inuenire triangulum.

Datâ basi, angulo uerticis, et summâ quadratorum perpendiculi et differentiae laterum, inuenire triangulum.

Et multa similia quarum enodationem facilius inuenturos uiros doctissimos existimo, quam de contactu Helicis Galilaei propositum problema aut theorema. Sed obseruandum in quaestionibus de triangulis, quotiens problema posset solui-

de plana non theorematum ad solida. Quod cum norunt uiri doctissimi superuacuum fortasse fuerit addere.

fig. 1



$GI = AI$

$KI = \frac{CI - IG}{2} =$

$\frac{CI - AI}{2}$

$IB : IK :: k : l$

$IB \times AC : IK \times AC :: k : l$

$IB \times AC = AI \times CO$

$CO : CI :: m : n$

$AI :$

$CO \times AI : CI \times AI :: m : n$

$IK : IF :: p : q$

$IK \times AC : IF \times AC :: p : q$

HI

$AI \times CO : IK \times AC :: k : l$

$CI \times AI : AI \times CO :: n : m$

$CI \times AI : IK \times AC :: kn : lm$

$IK \times AC : IF \times AC :: p : q$

$CI \times AI : IF \times AC :: knp : lmq$

$CI \times IG : IF \times AC :: knp : lmq$

$HI \times IE : IF \times AC :: knp : lmq$

$HI \times IE : IF \times AC :: ED : AC$

$HI \times IE = IF \times ED$

$DE \times IH = DE \times IH$

$(DE + IE) \times IH = (IF + IH) \times DE$

$\cancel{DE \times FH} =$

$DI \times IH = DE \times FH$

$(DH - HI) \times HI = DE \times FH$

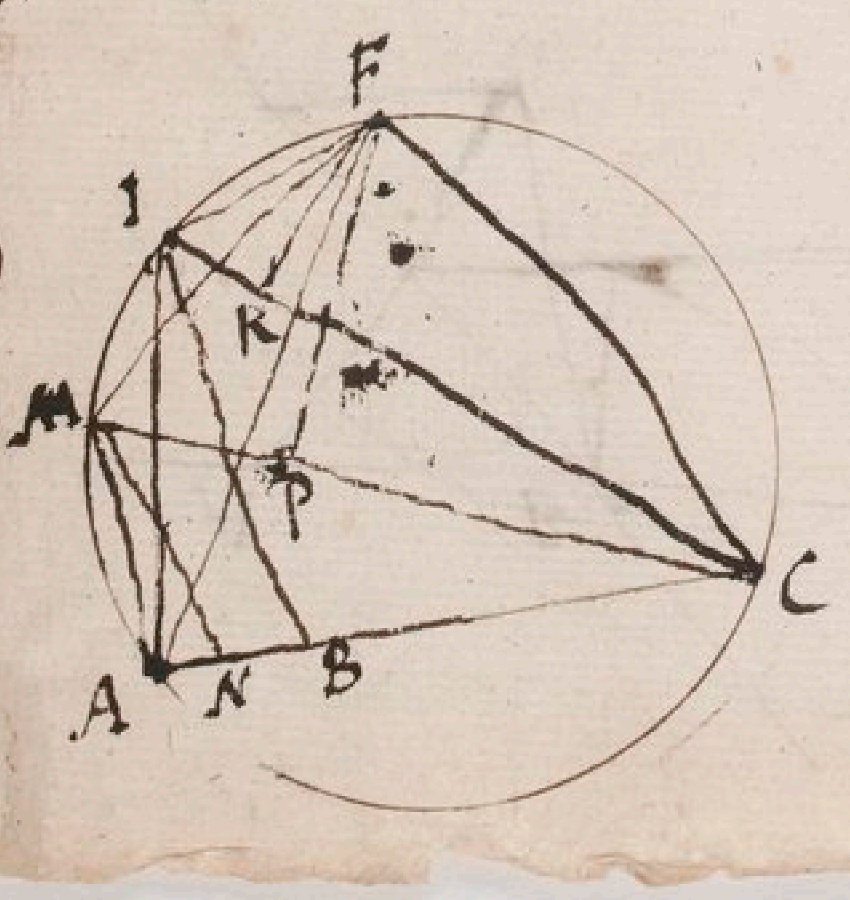
$AN : \cancel{AP} :: IB : \cancel{IR}\ IK$

$DI \times IH = A$

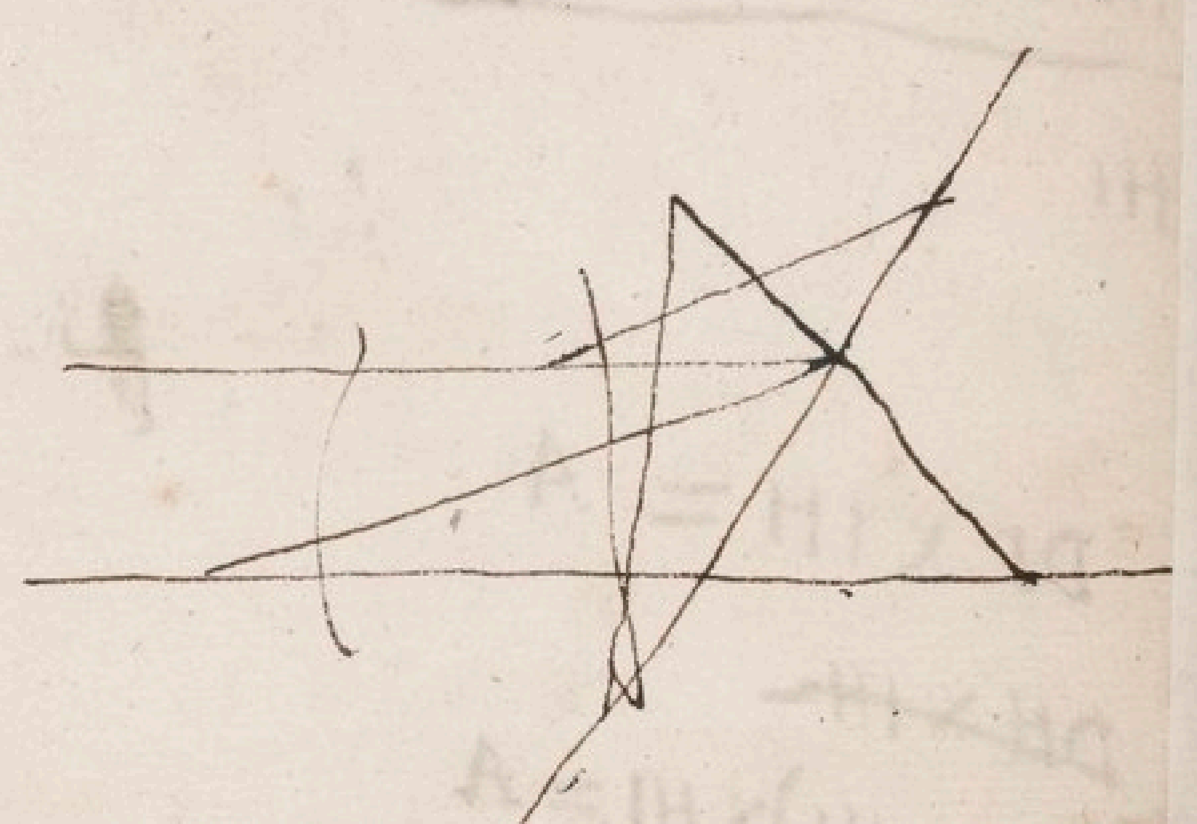
$\cancel{DH \times IH}$

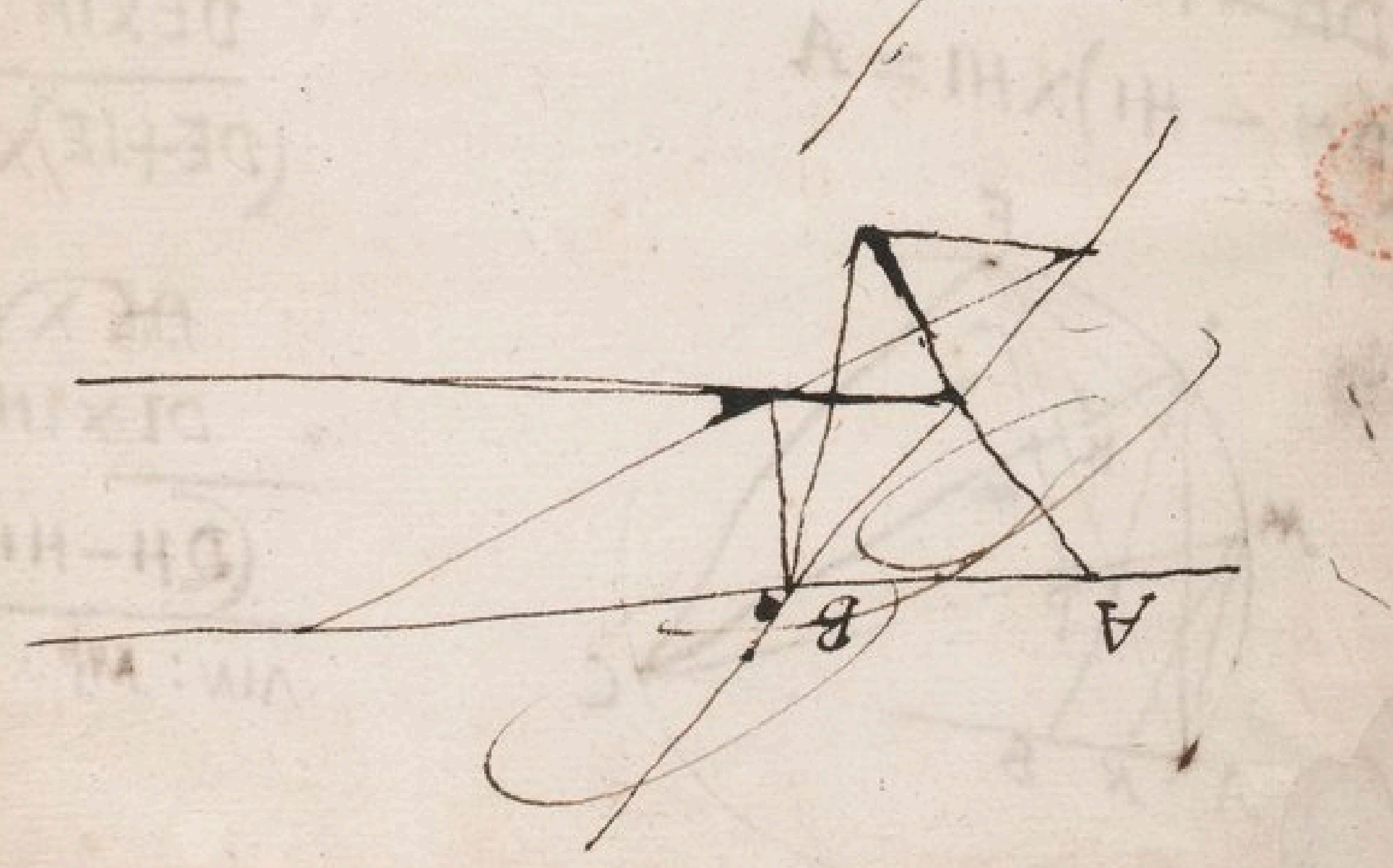
$(DH - HI) \times HI = A$

fig 2



772





INVENT
DE
GEO
METRIE